

Nom : _____

Prénom : _____



Troisième

Leçons

CHAPITRE G1 : THEOREME DE THALES

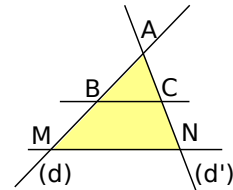
Méthode 1 : Calculer une longueur

À connaître : Théorème de Thalès

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles** alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Exemple 1 : Sur la figure ci-contre, les droites (BC) et (MN) sont parallèles. AB = 3 cm ; AN = 4 cm et AM = 7 cm. Calcule la longueur AC.



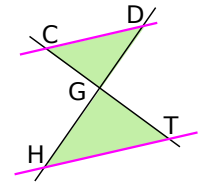
Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.
Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$, soit $\frac{3}{7} = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{MN}$.

On utilise la propriété des produits en croix pour calculer la longueur demandée.

Calcul de AC : $7 \times AC = 3 \times 4$ soit $AC = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7}$ donc $AC = \frac{12}{7}$ cm.

Exemple 2 : Sur la figure ci-contre, les droites (CD) et (HT) sont parallèles. On donne DG = 25 mm ; GH = 45 mm ; CG = 20 mm et HT = 27 mm. Calcule GT et CD.



Les droites (DH) et (CT) sont sécantes en G.
Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{GC}{GT} = \frac{GD}{GH} = \frac{CD}{HT}$, soit $\frac{20}{GT} = \frac{25}{45} = \frac{CD}{27}$.

Calcul de GT : $25 \times GT = 45 \times 20$.

$$GT = \frac{45 \times 20}{25}$$

donc GT = 36 mm.

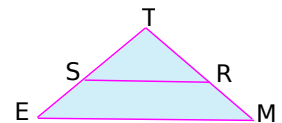
Calcul de CD : $25 \times 27 = 45 \times CD$.

$$CD = \frac{25 \times 27}{45}$$

donc CD = 15 mm.

Méthode 2 : Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

Exemple : Sur la figure ci-contre, TR = 11 cm ; TS = 8 cm ; TM = 15 cm et TE = 10 cm. Montre que les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.



Les droites (ES) et (MR) sont sécantes en T.

$$\text{D'une part, } \frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$$

$$\text{D'autre part, } \frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$$

On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$. Or, si les droites (RS) et (ME) étaient parallèles, d'après

le théorème de Thalès, il y aurait égalité.

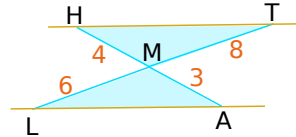
Comme ce n'est pas le cas, les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

Méthode 3 : Montrer que deux droites sont parallèles

À connaître : Réciproque du théorème de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
 B et M sont deux points de (d) distincts de A.
 C et N sont deux points de (d') distincts de A.
 Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple : Les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?



D'une part, $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$.

D'autre part, $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

On constate que $\frac{MH}{MA} = \frac{MT}{ML}$. De plus, les points A, M, H d'une part et les points L, M, T d'autre part sont alignés dans le même ordre. Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.

Méthode 4 : Agrandir ou réduire une figure

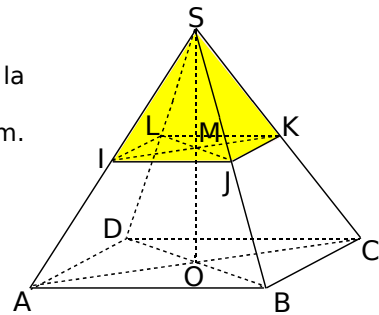
À connaître

Lorsque deux figures ont la **même forme** et des **longueurs proportionnelles**, on dit que l'une est l'agrandissement ou la réduction de l'autre.
 Dans un agrandissement ou une réduction, les **mesures des angles**, la **perpendicularité** et le **parallélisme** sont conservés.

Remarques : Si \mathcal{F} est un agrandissement de \mathcal{F}' alors \mathcal{F}' est une réduction de \mathcal{F} .

Le coefficient de proportionnalité k est le rapport d'agrandissement ($k > 1$) ou de réduction ($0 < k < 1$).

Exemple 1 : La pyramide SIJKL est une réduction de la pyramide SABCD.
 On donne $AB = 6$ cm ; $SA = 15$ cm et $SI = 5$ cm.
 Calcule IJ.



On sait que la pyramide SIJKL est une réduction de rapport k de la pyramide SABCD. Donc les longueurs des deux pyramides sont proportionnelles.

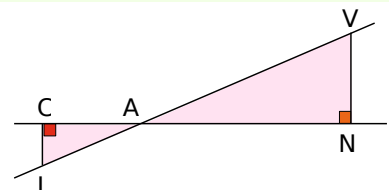
[SI] étant une réduction de rapport k de [SA], on en déduit que : $k = \frac{SI}{SA} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

De même, [IJ] est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de [AB].

Donc $IJ = k \times AB = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm.

Exemple 2 : Les droites (VL) et (CN) sont sécantes en A.
 (LC) et (VN) sont perpendiculaires à (CN).

Le triangle LAC est-il une réduction du triangle VAN ?
 Justifie ta réponse.



1) Les triangles LAC et VAN sont deux triangles rectangles donc ils ont la même forme.

2) Vérifions que les longueurs sont proportionnelles.

Les droites (CN) et (VL) sont sécantes en A.

Les droites (LC) et (NV) sont perpendiculaires à la même droite (AN) donc elles sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on en déduit que $\frac{AN}{AC} = \frac{AV}{AL} = \frac{NV}{LC}$.

Les longueurs des triangles VAN et LAC sont donc proportionnelles.

On peut alors conclure que le triangle LAC est une réduction du triangle VAN.

CHAPITRE G2 : TRIGONOMETRIE

Méthode 1 : Écrire les relations liant angles et longueurs

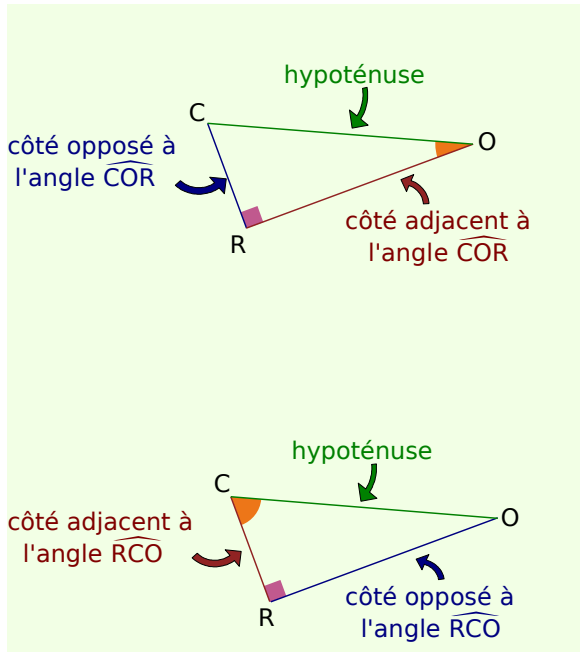
À connaître

Dans un **triangle rectangle**,

- **le cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- **le sinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- **la tangente d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

Remarques : Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1. La tangente d'un angle aigu est un nombre supérieur à 0.

Exemple : Le triangle COR est rectangle en R. Écris les formules donnant le cosinus et le sinus de l'angle \widehat{COR} puis la formule donnant la tangente de l'angle \widehat{RCO} .



Le triangle COR est rectangle en R donc

$$\cos \widehat{COR} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{COR}}{\text{hypoténuse}}$$
$$\cos \widehat{COR} = \frac{RO}{CO}$$

et

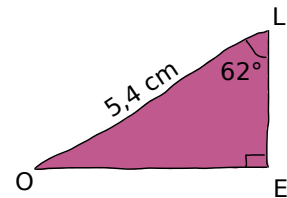
$$\sin \widehat{COR} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{COR}}{\text{hypoténuse}}$$
$$\sin \widehat{COR} = \frac{RC}{CO} .$$

Le triangle COR est rectangle en R donc

$$\tan \widehat{RCO} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{RCO}}{\text{côté adjacent à } \widehat{RCO}}$$
$$\tan \widehat{RCO} = \frac{RO}{RC} .$$

Méthode 2 : Calculer des longueurs

Exemple 1 : On considère un triangle LEO rectangle en E tel que $LO = 5,4$ cm et $\widehat{ELO} = 62^\circ$. Calcule la longueur du côté [EL] arrondie au millimètre.



Dans le triangle LEO rectangle en E,
[LO] est l'**hypoténuse** ;
[EL] est le **côté adjacent à l'angle \widehat{ELO}** .
On doit utiliser le cosinus de l'angle \widehat{ELO} .

$$\cos \widehat{ELO} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{ELO} = \frac{EL}{LO}$$

→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

→ On écrit le cosinus de l'angle connu (la longueur cherchée doit apparaître dans le rapport).

Dans le triangle LEO rectangle en E,
 [LO] est l'**hypoténuse** ;
 [EL] est le **côté adjacent à l'angle \widehat{ELO}** .
 On doit utiliser le cosinus de l'angle \widehat{ELO} .

$$EL = LO \times \cos \widehat{ELO}$$

$$EL = 5,4 \times \cos 62^\circ$$

$$EL \approx 2,5 \text{ cm.}$$

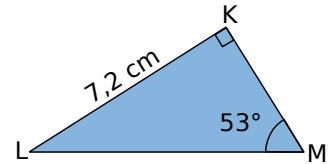
→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

→ On applique la règle des produits en croix.

→ On saisit $5,4 \times \text{COS}^{-1} 62$.

→ EL est inférieure à LO.
Le résultat est cohérent.

Exemple 2 : On considère KLM un triangle rectangle en K tel que $KL = 7,2 \text{ cm}$ et $\widehat{LMK} = 53^\circ$.
 Calcule la longueur du côté [LM] arrondie au millimètre.



Dans le triangle KLM rectangle en K,
 [LK] est le **côté opposé à l'angle \widehat{LMK}** ;
 [LM] est l'**hypoténuse**.
 On doit utiliser le sinus de l'angle \widehat{LMK} .

$$\sin \widehat{LMK} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{LMK}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \widehat{LMK} = \frac{KL}{LM}$$

$$LM = \frac{KL}{\sin \widehat{LMK}}$$

$$LM = \frac{7,2}{\sin 53^\circ}$$

$$LM \approx 9 \text{ cm.}$$

→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

→ On écrit le sinus de l'angle connu (la longueur cherchée doit apparaître dans le rapport).

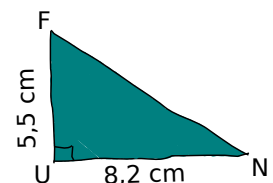
→ On applique la règle des produits en croix.

→ On saisit $7,2 \div \text{SIN}^{-1} 53$.

→ LM est supérieure à KL.
Le résultat est cohérent.

Méthode 3 : Calculer la mesure d'un angle

Exemple : Soit FUN un triangle rectangle en U tel que $UN = 8,2 \text{ cm}$ et $UF = 5,5 \text{ cm}$.
 Calcule la mesure de l'angle \widehat{UNF} arrondie au degré.



Dans le triangle FUN rectangle en U,
 [FU] est le **côté opposé à l'angle \widehat{UNF}** ;
 [UN] est le **côté adjacent à l'angle \widehat{UNF}** .
 On doit utiliser la tangente de l'angle \widehat{UNF} .

$$\tan \widehat{UNF} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$$

$$\tan \widehat{UNF} = \frac{UF}{UN}$$

$$\tan \widehat{UNF} = \frac{5,5}{8,2}$$

$$\widehat{UNF} \approx 34^\circ.$$

→ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.

→ On écrit la tangente de l'angle recherché.

→ On saisit **2nde** ou **SHIFT** puis **TAN⁻¹** (5,5 ÷ 8,2).

Méthode 4 : Utiliser les formules de trigonométrie

À connaître

Pour tout angle aigu \hat{A} , $(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$ et $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

Remarque : La première formule peut aussi s'écrire $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$.

Exemple : Calcule la valeur exacte de $\sin \hat{A}$ et $\tan \hat{A}$ sachant que \hat{A} est un angle aigu tel que $\cos \hat{A} = 0,8$.

- $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$ donc $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - 0,8^2 = 1 - 0,64 = 0,36$.
Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif donc $\sin \hat{A} = \sqrt{0,36} = 0,6$.
- $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$.

CHAPITRE G3 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Méthode 1 : Calculer des aires ou des volumes

À connaître

Pour **calculer l'aire A d'une sphère**, on utilise : $A = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$.

Pour **calculer le volume V d'une boule**, on utilise : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3$.

Exemple : Calcule l'aire d'une sphère et le volume d'une boule toutes deux de rayon 5 cm. Donne la valeur exacte puis la valeur approchée au dixième près.

On calcule l'aire de la sphère :

$$A = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2 = 4 \times \pi \times 5^2$$

$$A = 100\pi \text{ cm}^2 \text{ valeur exacte}$$

$$A \approx 314,2 \text{ cm}^2 \text{ valeur approchée}$$

On calcule le volume de la boule :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$$

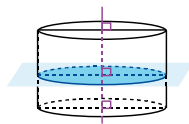
$$V = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3 \text{ valeur exacte}$$

$$V \approx 523,6 \text{ cm}^3 \text{ valeur approchée}$$

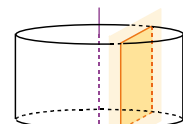
Méthode 2 : Déterminer la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à sa base

À connaître

La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un cercle de même rayon que la base.

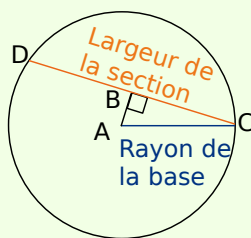


La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle.



Exemple : Un cylindre de révolution de hauteur 10 cm dont le rayon de la base mesure 3 cm est coupé parallèlement à 2 cm de son axe. Quelles sont les dimensions de la section ?

La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle. La longueur du rectangle correspond à la hauteur du cylindre. La figure ci-contre représente une vue de face de la base du cylindre.

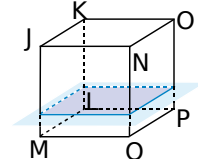
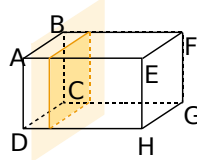


Le triangle ABC est rectangle en B. Le théorème de Pythagore donne : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
 $3^2 = 2^2 + BC^2$.
 $BC^2 = 9 - 4 = 5$,
 $BC = \sqrt{5}$.
Le triangle ADC est isocèle en A, donc B est le milieu de [DC].
D'où $DC = 2\sqrt{5}$.
Les dimensions de la section de ce cylindre sont 10 cm et $2\sqrt{5}$ cm.

Méthode 3 : Déterminer la section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face ou à une arête

À connaître

La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle de mêmes dimensions que cette face.



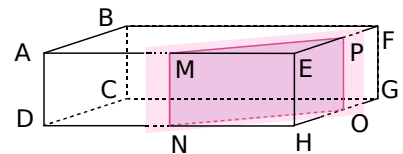
Remarque : Dans le cas particulier du cube, la section par un plan parallèle à une face est un carré de mêmes dimensions que cette face.

Exemple : Sur les figures ci-dessus, on donne $AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $AE = 5$ cm, $JN = 4$ cm. Donne les dimensions des sections représentées.

- Dans le pavé droit ABCDEFGH, la section représentée est parallèle à la face ABCD. Cette section est donc un rectangle de mêmes dimensions que ABCD soit 3 cm sur 4 cm.
- Dans le cube JKLMNOPQ, la section représentée est parallèle à la face LMQP. Cette section est donc un carré de mêmes dimensions que LMQP soit 4 cm.

À connaître

La section d'un pavé droit ou d'un cube par un plan parallèle à une arête est un rectangle, dont l'une des dimensions correspond à la longueur de cette arête.

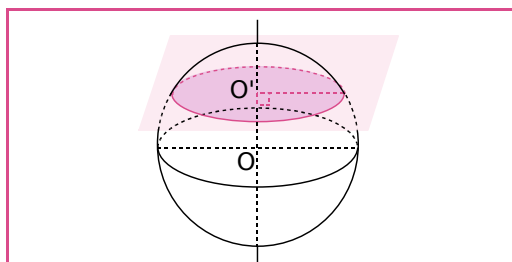


Exemple : Le pavé droit ABCDEFGH est coupé par un plan parallèle à l'arête [EH] de longueur 4 cm. On donne $EM = 3$ cm, $EP = 2$ cm. Donne la nature et les dimensions de la section MNOP.

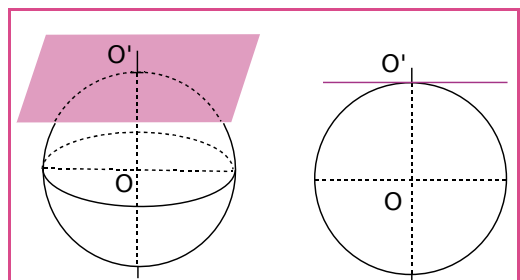
La section MNOP est parallèle à l'arête [EH] donc $MN = EH$ et MNOP est un rectangle. La face AEFB du pavé droit est un rectangle, donc le triangle MEP est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore, $MP^2 = ME^2 + EP^2$.
 $MP^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$. D'où $MP = \sqrt{13}$.
 Les dimensions du rectangle MNOP sont 4 cm et $\sqrt{13}$ cm.

Méthode 4 : Déterminer la section d'une sphère par un plan

À connaître



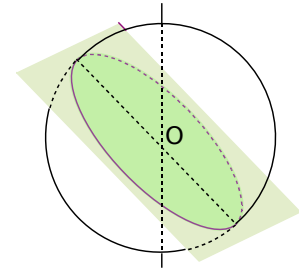
La section d'une sphère de centre O par un plan est un cercle de centre O'. Lorsque le plan ne passe pas par le centre, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.



Quand la distance OO' correspond au rayon de la sphère, la section est alors réduite au point O' . On dit que le plan est tangent à la sphère en O' .

Remarques :

- Le rayon de la section est toujours plus petit ou égal au rayon de la sphère.
- Dans le cas où le plan de section passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal au rayon de la sphère. La section est appelée **grand cercle**.



Exemple : Une sphère de rayon 4 cm est coupée par un plan à 3 cm de son centre.

Quelle est la nature de la section ? Représente la sphère et sa section en perspective. Donne les dimensions de la section.

La section d'une sphère par un plan est un cercle.

On appelle C le centre de la sphère,

A le centre de la section et

B un point de la section.

La droite (AC) est perpendiculaire au plan de section. En particulier, elle est perpendiculaire au rayon de la section [AB].

Donc, le triangle ABC est rectangle en A.

Le théorème de Pythagore donne :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

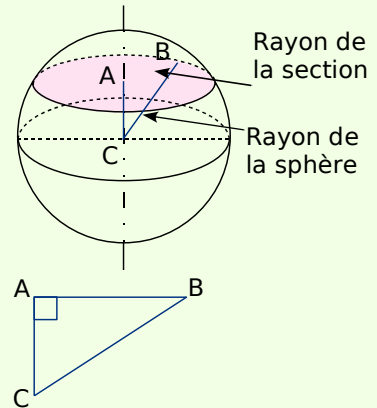
$$4^2 = AB^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 16 - 9$$

$$AB^2 = 7$$

$$\text{d'où } AB = \sqrt{7} \text{ cm.}$$

Le rayon de la section de cette sphère mesure $\sqrt{7}$ cm.



Méthode 5 : Agrandir ou réduire, effet sur l'aire, le volume

À connaître

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , les aires sont multipliées par k^2 , les volumes sont multipliés par k^3 .

Exemple : Des ingénieurs ont construit une maquette au $1/5\ 000^{\text{e}}$ d'un bassin de retenue. La maquette mesure 1,6 m de long et contient 5 L d'eau. La surface du lac artificiel est de 80 dm². Quelle sera, en km, la longueur du futur lac artificiel ? Quelle sera, en km², sa surface ? Quel sera, en millions de m³, le volume d'eau contenu dans le lac ?

Pour obtenir les longueurs réelles à partir des longueurs de la maquette au $1/5\ 000^{\text{e}}$, le coefficient d'agrandissement est : $k = 5\ 000$.

En m,

$$L_{\text{réelle}} = k \times L_{\text{maquette}}$$

$$L = 5\ 000 \times 1,6$$

$$L = 8\ 000$$

En dm²,

$$A_{\text{réelle}} = k^2 \times A_{\text{maquette}}$$

$$A = (5\ 000)^2 \times 80$$

$$A = 2\ 000\ 000\ 000$$

En L,

$$V_{\text{réel}} = k^3 \times V_{\text{maquette}}$$

$$V = (5\ 000)^3 \times 5$$

$$V = 625\ 000\ 000\ 000$$

1 m³ correspond

à 1 000 L donc

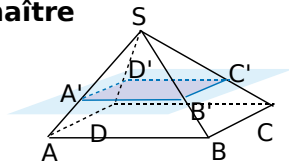
en km³,

$$V = 625\ 000\ 000$$

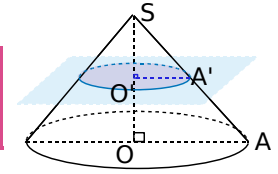
Le lac artificiel mesurera 8 km de long. Il aura une surface de 20 km² et contiendra 625 millions de m³.

Méthode 6 : Déterminer la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base

À connaître



La section d'une pyramide ou d'un cône par un **plan parallèle la base** est une réduction de la base.



Remarque : La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD et le cône de hauteur [SO'] est une réduction du cône de hauteur [SO].

Exemple : La pyramide SABCD de hauteur 5 cm à base carrée de côté 3 cm est coupée par un plan parallèle à sa base à 4 cm du sommet. Quelle est la mesure A'B' du côté de la base de la pyramide réduite SA'B'C'D' ?

La hauteur de la pyramide initiale est de 5 cm. La hauteur de la pyramide réduite est de 4 cm. Le coefficient de réduction est donné par : $k = \frac{4}{5}$.

La mesure du côté de la base de la pyramide réduite est donnée par :

$$A'B' = k \times AB = \frac{4}{5} \times 3 = 2,4. \text{ soit } A'B' = 2,4 \text{ cm.}$$

CHAPITRE G4 : ANGLES ET POLYGONES

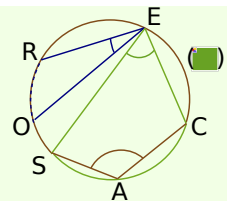
Méthode 1 : Utiliser les angles inscrits dans un cercle

À connaître

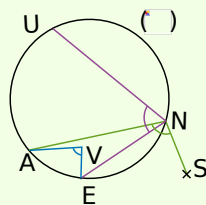
Un **angle inscrit dans un cercle** est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle en un point distinct du sommet. La portion de cercle comprise entre les deux côtés de l'angle s'appelle l'**arc de cercle intercepté**.

Exemple 1 : Donne le nom des arcs de cercle interceptés par les angles inscrits dans le cercle ci-contre.

L'angle inscrit \widehat{REO} intercepte le petit arc de cercle \widehat{RO} .
 L'angle inscrit \widehat{SEC} intercepte le petit arc de cercle \widehat{SC} .
 L'angle inscrit \widehat{SAC} intercepte le grand arc de cercle \widehat{SC} .



Exemple 2 : Les angles \widehat{UNE} ; \widehat{AVE} et \widehat{ANS} sont-ils des angles inscrits dans le cercle () ?
 Si oui, donne le nom de l'arc intercepté.

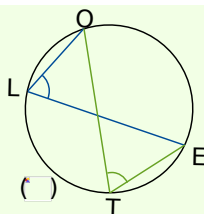


.Son sommet N appartient au cercle et ses côtés recoupent le cercle en U et E .
 L'angle \widehat{UNE} est un angle inscrit dans le cercle ().
 Il intercepte l'arc \widehat{UE} .
 .Son sommet V n'est pas un point du cercle.
 L'angle \widehat{AVE} n'est pas un angle inscrit dans le cercle ().
 .Son côté $[NS]$ ne coupe le cercle qu'en N .
 L'angle \widehat{ANS} n'est pas un angle inscrit dans le cercle ().

À connaître

Si deux angles sont **inscrits dans un même cercle** et s'ils **interceptent le même arc**, alors ils ont la même mesure.

Exemple 3 : Sur la figure ci-dessous, l'angle \widehat{OTE} mesure 67° .
 Détermine la mesure de l'angle \widehat{OLE} .



Les angles \widehat{OTE} et \widehat{OLE} sont inscrits dans le cercle ().
 Ils interceptent tous les deux l'arc \widehat{OE} .
 Donc ils ont la même mesure.
 L'angle \widehat{OTE} mesure 67° .
 Donc l'angle \widehat{OLE} mesure 67° .

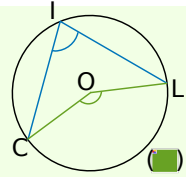
Méthode 2 : Utiliser les angles au centre d'un cercle

À connaître

Si un **angle inscrit** dans un cercle et un **angle au centre** (son sommet est le centre du cercle) interceptent le même arc de cercle, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.

Exemple : La figure ci-dessous représente un cercle (\odot) de centre O .
L'angle \widehat{CIL} mesure 76° . Détermine la mesure de l'angle \widehat{COL} .

Dans le cercle (\odot) , l'angle inscrit \widehat{CIL} et l'angle au centre \widehat{COL} interceptent le même arc \widehat{CL} .
Donc l'angle au centre \widehat{COL} mesure le double de l'angle inscrit \widehat{CIL} .
 $\widehat{COL} = 2 \times \widehat{CIL} = 2 \times 76^\circ = 152^\circ$.
L'angle au centre \widehat{COL} mesure 152° .



Méthode 3 : Construire un polygone régulier

À connaître

Un polygone est régulier lorsque tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

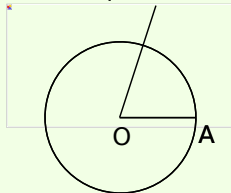
À connaître

Un polygone régulier à n côtés est inscriptible dans un cercle. Tous les angles au centre déterminés par deux sommets consécutifs du polygone ont la même mesure.

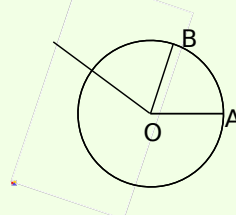
Exemple : Construis un cercle de centre O . Inscris un pentagone ABCDE dans ce cercle.

Un pentagone a 5 côtés. Les angles au centre déterminés par deux sommets consécutifs du polygone sont tous égaux à 72° ($360 \div 5 = 72$).

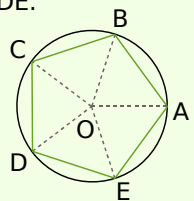
On construit le cercle et l'un de ses rayons $[OA]$. Trace un autre rayon $[OB]$ tel que $\widehat{AOB} = 72^\circ$



On trace un autre rayon $[OC]$ tel que $\widehat{BOC} = 72^\circ$



Ainsi de suite jusqu'à obtenir le pentagone ABCDE.



CHAPITRE N1 : NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

Méthode 1 : Maîtriser le vocabulaire

À connaître

a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel. On dit que :

a est un multiple de b ou a est divisible par b ou b est un diviseur de a ou b divise a .

Remarque : L'entier naturel k est aussi un diviseur de a (k divise aussi a , a est aussi un multiple de k et a est aussi divisible par k).

Exemple 1 : 1 274 est-il un multiple de 49 ? 1 974 est-il divisible par 84 ?

$1\ 274 \div 49 = 26$ donc $1\ 274 = 49 \times 26$.
1 274 est donc un multiple de 49 (et de 26). On dit également que 1 274 est divisible par 49 (et par 26), que 49 est un diviseur de 1 274 (26 l'est aussi) ou que 49 divise 1 274 (26 divise aussi 1 274).

$1\ 974 \div 84 = 23,5$.
23,5 n'est pas un entier naturel, 1 974 n'est donc pas divisible par 84.
On peut dire également que 84 n'est pas un diviseur de 1 974 et que 1 974 n'est pas un multiple de 84.

Exemple 2 : Établis la liste de tous les diviseurs de 198.

Pour cela, on cherche tous les produits d'entiers naturels égaux à 198.

$$198 = 1 \times 198$$

$$198 = 2 \times 99$$

$$198 = 3 \times 66$$

$$198 = 6 \times 33$$

$$198 = 9 \times 22$$

$$198 = 11 \times 18$$

Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui-même.

Les critères de divisibilité permettent de dire que 198 n'est pas divisible par 4, 5 et 10.

Les divisions par 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16 et 17 ne donnant pas de quotients entiers, 198 n'est pas divisible par ces entiers.

Le diviseur suivant est 18 et on l'a déjà obtenu avec le produit 11×18 : on peut donc arrêter la recherche.

Les diviseurs de 198 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 11 ; 18 ; 22 ; 33 ; 66 ; 99 et 198.

Exemple 3 : Démontre que si un entier naturel est divisible par 6 alors il est divisible par 2.

n est divisible par 6 donc n peut s'écrire : $n = 6 \times k$ où k est un entier naturel.

$n = 2 \times 3 \times k = 2 \times (3k)$ où $3k$ est un entier naturel. Ainsi n est divisible par 2.

À connaître

$\begin{array}{l} a \\ r \end{array} \left| \begin{array}{l} b \\ q \end{array} \right.$ Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ et $r < b$.
 q est le **quotient** (entier) et r le **reste** de cette division euclidienne.

Exemple 4 : a. Effectue la division euclidienne de 183 par 12. b. $278 = 6 \times 45 + 8$: quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

$\begin{array}{r} 183 \\ 63 \overline{) 183} \\ \underline{63} \\ 120 \\ \underline{120} \\ 3 \end{array}$ On peut donc écrire :
 $183 = 12 \times 15 + 3$
avec $3 < 12$.

$8 < 45$ mais $8 > 6$ donc l'égalité représente la division euclidienne de 278 par 45 mais ne peut pas représenter celle de 278 par 6.

Méthode 2 : Déterminer le PGCD de deux entiers naturels

À connaître

Le **PGCD de deux entiers naturels** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Exemple 1 : Trouve les diviseurs communs à 30 et 105 puis détermine leur PGCD.

On liste les diviseurs de 30 :
1 ; 2 ; **3** ; **5** ; 6 ; 10 ; **15** et 30.

On liste les diviseurs de 105 :
1 ; **3** ; **5** ; 7 ; **15** ; 21 ; 35 et 105.

Les diviseurs communs à 30 et 105 sont : 1 ; 3 ; 5 et **15**.

Le PGCD de 30 et 105 est donc **15**, car c'est le plus grand des diviseurs communs.

On note $\text{PGCD}(30 ; 105) = 15$ ou $\text{PGCD}(105 ; 30) = 15$.

Remarque : a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.

Exemple 2 : Détermine $\text{PGCD}(189 ; 693)$ par la **méthode des soustractions successives**.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geq b$, $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$.

$693 > 189$ et $693 - 189 = 504$ donc $\text{PGCD}(693 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 504)$.

On cherche maintenant $\text{PGCD}(189 ; 504)$: on applique à nouveau la propriété.

$504 > 189$ et $504 - 189 = 315$ donc $\text{PGCD}(504 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 315)$.

On poursuit avec 189 et 315 et ainsi de suite :

$315 > 189$ et $315 - 189 = 126$ donc $\text{PGCD}(315 ; 189) = \text{PGCD}(189 ; 126)$.

$189 > 126$ et $189 - 126 = 63$ donc $\text{PGCD}(189 ; 126) = \text{PGCD}(126 ; 63)$.

Or 63 est un diviseur de 126 ($126 = 63 \times 2$) donc $\text{PGCD}(126 ; 63) = 63$.

Ainsi $\text{PGCD}(693 ; 189) = 63$.

Exemple 3 : Trouve le PGCD de 782 et de 136 par la **méthode des divisions successives**.

Pour cela, on utilise la propriété suivante :

a et b sont des entiers naturels et $a \geq b$, $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

On effectue la division euclidienne de 782 par 136 : $782 = 136 \times 5 + 102$.
Donc $\text{PGCD}(782 ; 136) = \text{PGCD}(136 ; 102)$.

$$\begin{array}{r} 782 \overline{)136} \\ \underline{102} \\ 102 \\ \underline{510} \\ 102 \\ \underline{510} \\ 0 \end{array}$$

On cherche maintenant $\text{PGCD}(136 ; 102)$: on applique à nouveau la propriété.

On effectue la division euclidienne de 136 par 102 : $136 = 102 \times 1 + 34$.

Donc $\text{PGCD}(136 ; 102) = \text{PGCD}(102 ; 34)$.

$$\begin{array}{r} 136 \overline{)102} \\ \underline{102} \\ 34 \\ \underline{34} \\ 0 \end{array}$$

On continue avec $\text{PGCD}(102 ; 34)$.

On effectue la division euclidienne de 102 par 34 : $102 = 34 \times 3$.

$$\begin{array}{r} 102 \overline{)34} \\ \underline{102} \\ 0 \end{array}$$

Le reste est égal à 0 : 34 est un diviseur de 102 donc $\text{PGCD}(102 ; 34) = 34$.

Ainsi, $\text{PGCD}(782 ; 136) = 34$.

Méthode 3 : Démontrer que deux nombres entiers sont premiers entre eux

À connaître

Deux **entiers naturels sont premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1. Autrement dit, 1 est le seul diviseur commun à ces deux entiers naturels.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 91 sont premiers entre eux.

$45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$. Les diviseurs de 45 sont : **1** ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.

$91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$. Les diviseurs de 91 sont : **1** ; 7 ; 13 et 91.

1 est le seul diviseur commun à 45 et 91 ainsi le PGCD de 45 et 91 est égal à 1 : 45 et 91 sont donc premiers entre eux.

Exemple 2 : 426 et 568 sont-ils premiers entre eux ?

426 et 568 sont tous les deux divisibles par 2 donc ils ont un autre diviseur commun que 1 : leur PGCD n'est pas égal à 1. Ainsi 426 et 568 ne sont pas premiers entre eux.

Méthode 4 : Rendre une fraction irréductible

À connaître

Une **fraction est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple : Rends les fractions $\frac{75}{105}$; $\frac{198}{180}$ et $\frac{136}{782}$ irréductibles.

On remarque que 75 et 105 sont divisibles par 3 et par 5.

$$\frac{75}{105} = \frac{75 \div 3}{105 \div 3} = \frac{25}{35}$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25 \div 5}{35 \div 5} = \frac{5}{7}$$

5 et 7 sont premiers entre eux donc la fraction est irréductible.

On peut chercher à écrire 198 et 180 sous forme de produits de facteurs les plus petits possible :

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$198 = 2 \times 3^2 \times 11 \text{ donc :}$$

$$\frac{198}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 3^2 \times 5} =$$

$$\frac{11}{2 \times 5}$$

$$\text{Ainsi } \frac{198}{180} = \frac{11}{10}$$

Le PGCD de 136 et 782 est 34 (cf. **méthode 2**).

34 est donc le plus grand entier naturel qui divise à la fois 136 et 782.

Les quotients obtenus sont obligatoirement premiers entre eux.

$$\frac{136}{782} = \frac{136 \div 34}{782 \div 34} = \frac{4}{23}$$

CHAPITRE N2 : CACUL LITERAL

Méthode 1 : Développer avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b ,
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x + 3)^2$.

On utilise l'identité $(a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \quad \longrightarrow \quad \text{On remplace } a \text{ par } x \text{ et } b \text{ par } 3 \text{ dans } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression obtenue.}$$

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(x - 4)^2$.

On utilise l'identité $(a - b)^2$ avec $a = x$ et $b = 4$.

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 \quad \longrightarrow \quad \text{On remplace } a \text{ par } x \text{ et } b \text{ par } 4 \text{ dans } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés.

$$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression obtenue.}$$

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(3x - 5)^2$.

On utilise l'expression $(a - b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$.

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 \quad \longrightarrow \quad \text{On remplace } a \text{ par } 3x \text{ et } b \text{ par } 5 \text{ dans } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Attention ! $a = 3x$ donc $a^2 = (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.

$$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25 \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression obtenue.}$$

Exemple 4 : Développe et réduis l'expression $(7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise l'expression $(a + b)(a - b)$ avec $a = 7x$ et $b = 2$.

$$(7x + 2)(7x - 2) = (7x)^2 - 2^2 \quad \longrightarrow \quad \text{On remplace } a \text{ par } 7x \text{ et } b \text{ par } 2 \text{ dans } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$(7x + 2)(7x - 2) = 49x^2 - 4 \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression obtenue.}$$

Méthode 2 : Factoriser avec un facteur commun

À connaître

Pour tous nombres a , b et k , on a $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$.

Exemple 1 : Fais apparaître un facteur commun dans l'expression $A = 3y + 21$ puis factorise.

$$A = 3 \times y + 3 \times 7 \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$A = 3(y + 7) \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 2x + xy$.

$$B = 2 \times x + x \times y \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$B = x(2 + y) \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$.

$$C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1) \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$C = (2x + 5)[(3x + 7) + (6x + 1)] \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

$$C = (2x + 5)(9x + 8) \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.}$$

Exemple 4 : Factorise l'expression $D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$.

$$D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11) \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$D = (9x - 4)[(5x + 6) - (3x + 11)] \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

$$D = (9x - 4)[5x + 6 - 3x - 11] \quad \longrightarrow \quad \text{On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « - ».}$$

$$D = (9x - 4)(2x - 5) \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.}$$

Exemple 5 : Factorise l'expression $E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$.

$$E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)(5x - 7) \quad \longrightarrow \quad \text{On repère un facteur commun.}$$

$$E = (5x - 7)[(9x - 2) - (5x - 7)] \quad \longrightarrow \quad \text{On factorise.}$$

$$E = (5x - 7)[9x - 2 - 5x + 7] \quad \longrightarrow \quad \text{On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « - ».}$$

$$E = (5x - 7)(4x + 5) \quad \longrightarrow \quad \text{On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.}$$

Méthode 3 : Factoriser avec les identités remarquables

À connaître

Pour tous nombres a et b ,
 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemple 1 : Factorise l'expression $A = x^2 + 6x + 9$.

$A = x^2 + 6x + 9$ → On observe trois termes précédés du signe +.

$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ → On met en évidence l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$A = (x + 3)^2$ → On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2$.

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 25x^2 - 20x + 4$.

$B = 25x^2 - 20x + 4$ → On observe trois termes et des signes différents.

$B = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$ → On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$.

$B = (5x - 2)^2$ → On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = 64x^2 - 49$.

$C = 64x^2 - 49$ → On observe la différence de deux carrés.

$C = (8x)^2 - 7^2$ → On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$.

$C = (8x + 7)(8x - 7)$ → On remplace a par $8x$ et b par 7 dans $(a + b)(a - b)$.

Méthode 4 : Résoudre une équation produit

Exemple : Résous l'équation $(x + 3)(x - 7) = 0$.

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.

On en déduit que :

$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 7 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 7$$

On teste les valeurs trouvées.

Pour $x = -3$: $(x + 3)(x - 7) = (-3 + 3)(-3 - 7) = 0 \times (-10) = 0$.

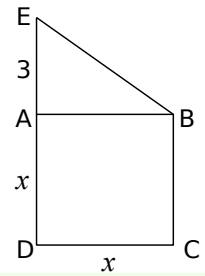
Pour $x = 7$: $(x + 3)(x - 7) = (7 + 3)(7 - 7) = 10 \times 0 = 0$.

Les solutions de l'équation produit $(x + 3)(x - 7) = 0$ sont -3 et 7 .

Méthode 5 : Mettre un problème en équation

Exemple : Sur le schéma, ABCD est un carré de côté x cm et ABE est un triangle rectangle en A tel que $AE = 3$ cm et $AB = x$ cm.

Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du carré ABCD est-elle égale à l'aire du triangle rectangle ABE ?



Étape n°1 : Choisir l'inconnue

Soit x la mesure du côté du carré ABCD.

On repère la grandeur inconnue parmi celles exprimées dans l'énoncé. On la note x .

Étape n°2 : Mettre en équation

$$A_{ABCD} = AB \times AD$$
$$A_{ABCD} = x \times x = x^2$$

$$A_{ABE} = AB \times AE \div 2$$
$$A_{ABE} = x \times 3 \div 2 = 1,5x$$

Le nombre cherché vérifie donc l'équation :

$$x^2 = 1,5x$$

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x .

La phrase de l'énoncé se traduit donc par l'égalité ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre l'équation

Pour résoudre l'équation, on se ramène à une équation produit nulle.

$$x^2 - 1,5x = 1,5x - 1,5x$$
$$x^2 - 1,5x = 0$$

$$x \times x - 1,5x = 0$$
$$x(x - 1,5) = 0$$

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul.

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1,5 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1,5$$

On élimine les termes en x dans le membre de droite.

On factorise pour se ramener à une équation produit.

On résout l'équation produit.

Étape n°4 : Vérifier que les valeurs trouvées sont solutions du problème

On teste les valeurs trouvées.

Pour $x = 0$: $x^2 = 0$ et $1,5x = 0$.

Pour $x = 1,5$: $x^2 = 1,5^2 = 2,25$

et $1,5x = 1,5 \times 1,5 = 2,25$.

On vérifie que les valeurs trouvées répondent à la question.

Étape n°5 : Conclure

Comme x est un nombre strictement positif, la solution 0 ne convient pas à ce problème. La solution du problème est donc 1,5 cm.

On conclut.

CHAPITRE N3 : RACINES CARREES

Méthode 1 : Utiliser la définition de la racine carrée

À connaître

La **racine carrée d'un nombre positif** a est le **nombre positif**, noté \sqrt{a} , dont le carré est a . Le symbole $\sqrt{\quad}$ est appelé « **radical** ».

Remarque : \sqrt{a} n'a pas de sens lorsque a est un nombre strictement négatif.

À connaître

Pour tout nombre **positif** a , $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple 1 : Calcule $\sqrt{1}$; $(\sqrt{3,6})^2$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{5^2}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ et $\sqrt{1,3 \times 1,3}$.

- $1^2 = 1$ et 1 est positif donc $\sqrt{1} = 1$.
- 3,6 est positif donc $(\sqrt{3,6})^2 = 3,6$.
- $3^2 = 9$ et 3 est positif donc $\sqrt{9} = 3$.
- 5 est positif donc $\sqrt{5^2} = 5$ et $\sqrt{(-5)^2} = 5$.
- 2 est positif donc $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$.
- 1,3 est positif donc $\sqrt{1,3 \times 1,3} = \sqrt{1,3^2} = 1,3$.

À connaître

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier, sa racine carrée est un nombre entier positif.

Exemple 2 : À l'aide de la calculatrice, donne la valeur exacte ou la valeur arrondie au millième des nombres $\sqrt{625}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{12,25}$.

On utilise la touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice.

• Pour $\sqrt{625}$, la calculatrice affiche 25.

Donc $\sqrt{625} = 25$ (**valeur exacte**).

La racine carrée de 625 est un entier donc 625 est un **carré parfait**.

• Pour $\sqrt{2}$, la calculatrice affiche 1,414213562.

2 **n'est pas un carré parfait**, on donne une **valeur arrondie** de $\sqrt{2}$.

Donc $\sqrt{2} \approx 1,414$ (**valeur arrondie au millième**).

• Pour $\sqrt{12,25}$, la calculatrice affiche 3,5. Donc $\sqrt{12,25} = 3,5$ (**valeur exacte**).

Méthode 2 : Simplifier la racine carrée d'un produit ou le produit de racines carrées

À connaître

Pour tous nombres positifs a et b , $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exemple 1 : Simplifie puis calcule les nombres $A = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$ et $B = \sqrt{5} \times \sqrt{0,45}$.

$$A = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$B = \sqrt{5} \times \sqrt{0,45} = \sqrt{5 \times 0,45} = \sqrt{2,25} = 1,5$$

Exemple 2 : Écris le nombre $C = \sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$$C = \sqrt{16 \times 2}$$

→ On fait apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un entier.

$$C = \sqrt{4^2 \times 2}$$

$$C = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2}$$

→ On décompose la racine carrée du produit puis on applique la définition d'une racine carrée.

$$C = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Méthode 3 : Simplifier la racine carrée d'un quotient ou le quotient de racines carrées

À connaître

$$\text{Pour tous nombres positifs } a \text{ et } b \text{ (} b \neq 0 \text{), } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Exemple 1 : Simplifie les nombres $A = \sqrt{\frac{36}{25}}$ et $B = \frac{\sqrt{0,56}}{\sqrt{0,08}}$.

$$A = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

$$B = \frac{\sqrt{0,56}}{\sqrt{0,08}} = \sqrt{\frac{0,56}{0,08}} = \sqrt{\frac{0,56 \times 100}{0,08 \times 100}} = \sqrt{\frac{56}{8}} = \sqrt{7}$$

Exemple 2 : Écris $C = \sqrt{\frac{25}{7}}$ sous la forme d'un quotient, sans radical au dénominateur.

$$C = \sqrt{\frac{25}{7}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{7}}$$

→ On décompose la racine carrée du quotient afin de simplifier le numérateur.

$$C = \frac{5 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$$

→ On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}$ puis on applique la définition d'une racine carrée.

Méthode 4 : Réduire une somme de racines carrées

Exemple 1 : Réduis la somme $A = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$.

$$A = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

→ On remarque que $\sqrt{5}$ est un facteur commun aux trois termes de la somme.

$$A = (1 - 2 + 7)\sqrt{5}$$

→ On factorise par $\sqrt{5}$.

$$A = 6\sqrt{5}$$

→ On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Exemple 2 : Écris $B = 2\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ sous la forme $c\sqrt{d}$, où c et d sont deux entiers relatifs, d étant le plus petit possible.

$$B = 2\sqrt{36 \times 2} - 7\sqrt{9 \times 2}$$

→ On décompose 72 et 18 pour faire apparaître le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un même entier.

$$B = 2\sqrt{36} \times \sqrt{2} - 7\sqrt{9} \times \sqrt{2}$$

→ On décompose la racine carrée de chacun des produits.

$$B = 2 \times 6\sqrt{2} - 7 \times 3\sqrt{2}$$

→ On applique la définition d'une racine carrée.

$$B = 12\sqrt{2} - 21\sqrt{2}$$

→ $\sqrt{2}$ est un facteur commun aux deux termes.

$$B = (12 - 21)\sqrt{2}$$

→ On factorise par $\sqrt{2}$.

$$B = -9\sqrt{2}$$

→ On donne l'écriture demandée dans l'énoncé.

Méthode 5 : Résoudre une équation du type $x^2 = a$

À connaître

Pour tout nombre relatif a ,

- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution 0.
- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemple : Résous les équations $x^2 = 3$, $x^2 = 36$ et $x^2 = -9$.

- $3 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 3$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
- $36 > 0$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 = 36$ sont $-\sqrt{36}$ et $\sqrt{36}$ soit -6 et 6 .
- $-9 < 0$ donc l'équation $x^2 = -9$ n'a aucune solution.

CHAPITRE N4 : SYSTEMES D'EQUATIONS

Méthode 1 : Tester des valeurs dans un système d'équations

À connaître

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$ est un **système de deux équations** du premier degré à **deux inconnues** désignées par les lettres x et y . Un couple de nombres (x, y) est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple $(2 ; -3)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$?

Pour $x = 2$ et $y = -3$:

$5x + 2y = 5 \times 2 + 2 \times (-3) = 10 - 6 = 4$ et $-2x + y = -2 \times 2 + (-3) = -7$.

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x = 2$ et $y = -3$ donc le couple

$(2 ; -3)$ est solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$.

Méthode 2 : Résoudre un système par substitutions

Exemple : Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitutions.

$$y = 9 + 3x$$

On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.

$$4x - 3(9 + 3x) = -17$$

On remplace (substitue) y par $9 + 3x$ dans la deuxième équation.

$$4x - 27 - 9x = -17$$

$$-5x = 10$$

$$x = -2$$

On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x .

$$y = 9 + 3 \times (-2)$$

$$y = 9 - 6$$

$$y = 3$$

On remplace x par -2 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y .

Ainsi $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$, pour $x = -2$ et pour $y = 3$.

On vérifie ensuite que le couple $(-2 ; 3)$ est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.

On en déduit que $(-2 ; 3)$ est la solution de ce système.

Méthode 3 : Résoudre un système par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

Détermination d'une des inconnues

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue. Le plus petit multiple commun à 4 et 5 est 20 donc :

$$\begin{cases} 5 \times (5x - 4y) = 5 \times 8 \\ 4 \times (2x + 5y) = 4 \times 1 \end{cases} \longrightarrow \text{On multiplie les deux membres de la première équation par } 5 \text{ et ceux de la seconde par } 4.$$

$$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases} \longrightarrow \text{On obtient ainsi des coefficients opposés devant } y \text{ dans les deux équations.}$$

$$25x + 8x = 40 + 4 \longrightarrow \text{On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer } y.$$

$$33x = 44 \longrightarrow \text{On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de } x.$$
$$x = \frac{44}{33} = \frac{4 \times 11}{3 \times 11} = \frac{4}{3}$$

Détermination de l'autre inconnue

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ 5 \times (2x + 5y) = 5 \times 1 \end{cases} \longrightarrow \text{On multiplie les deux membres de la première équation par } 2 \text{ et ceux de la seconde par } 5.$$

$$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases} \longrightarrow \text{On obtient ainsi le même coefficient devant } x \text{ dans les deux équations.}$$

$$-8y - 25y = 16 - 5 \longrightarrow \text{On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer } x.$$

$$-33y = 11 \longrightarrow \text{On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de } y.$$
$$y = \frac{11}{-33} = -\frac{11 \times 1}{11 \times 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \text{ pour } x = \frac{4}{3} \text{ et } y = -\frac{1}{3}.$$

On vérifie ensuite que le couple $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.

On en déduit que le couple $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y , on pouvait aussi remplacer x par $\frac{4}{3}$ dans l'une des deux équations du système de l'énoncé et résoudre l'équation ainsi obtenue.

Méthode 4 : Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple : Un musée propose un tarif pour les adultes à 7 € et un autre pour les enfants à 4,50 €.

Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 €.

Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants. \longrightarrow **On repère les inconnues.**
On les note généralement x et y .

Étape n°2 : Mettre en équations

205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$.

La recette totale a été de 1 222,50 € donc $7x + 4,50y = 1\,222,50$.

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4,50y = 1\,222,50 \end{cases}$$

\longrightarrow **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x et de y .

\longrightarrow L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre le système

On peut résoudre le système par substitutions.

$$x = 205 - y$$

\longrightarrow On exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation.

$$7(205 - y) + 4,50y = 1\,222,50$$

\longrightarrow On remplace (substitue) x par **205 - y** dans la deuxième équation.

$$\begin{aligned} 1\,435 - 7y + 4,50y &= 1\,222,50 \\ -2,50y &= -212,50 \\ y &= 85 \end{aligned}$$

\longrightarrow On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de y .

$$\begin{aligned} x &= 205 - 85 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

\longrightarrow On remplace y par **85** dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de x .

Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4,50y = 1\,222,50 \end{cases} \text{ pour } x = 120 \text{ et } y = 85.$$

On vérifie ensuite que le couple (120 ; 85) est une solution effective de ce système en appliquant la **méthode 1**.

On en déduit que le couple (120 ; 85) est la solution de ce système.

Étape n°5 : Conclure

120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

CHAPITRE N5 : INÉGALITES ET INÉQUATIONS

Méthode 1 : Tester si un nombre est solution

À connaître

Une **solution d'une inéquation** est un nombre pour lequel l'inégalité est vraie.

Exemple : -2 est-il solution de l'inéquation $3x + 2 < -2x - 8$?

On calcule chaque membre de l'inégalité en remplaçant x par -2 .

$$3 \times (-2) + 2 = -6 + 2 = -4 \longrightarrow \text{Le premier membre a pour valeur } -4.$$

$$-2 \times (-2) - 8 = 4 - 8 = -4 \longrightarrow \text{Le deuxième membre a pour valeur } -4.$$

$-4 > -4$ donc -2 n'est pas solution de l'inéquation $3x + 2 < -2x - 8$. \longrightarrow On conclut après avoir comparé les deux nombres.

Méthode 2 : Résoudre une inéquation

À connaître

- On ne change pas le sens d'une inégalité **en additionnant ou en soustrayant** un même nombre à ses deux membres.
- On ne change pas le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **strictement positif**.
- On change le sens d'une inégalité **en multipliant ou en divisant** ses deux membres par un même nombre **strictement négatif**.

Exemple 1 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $7x - 3 > 2x - 1$.

$$7x - 3 - 2x > 2x - 1 - 2x \longrightarrow \text{On soustrait } 2x \text{ à chaque membre.}$$

$$5x - 3 > -1 \longrightarrow \text{On réduit.}$$

$$5x - 3 + 3 > -1 + 3 \longrightarrow \text{On ajoute } 3 \text{ à chaque membre.}$$

$$5x > 2 \longrightarrow \text{On réduit.}$$

$$x > \frac{2}{5} \longrightarrow \text{On divise chaque membre par } 5. \text{ Comme } 5 \text{ est un nombre strictement positif, le sens de l'inégalité ne change pas.}$$

Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$. \longrightarrow On conclut en décrivant les solutions.

Exemple 2 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $-3x - 8 \leq x - 1$.

$$-4x - 8 \leq -1$$

→ On soustrait x à chaque membre.

$$-4x \leq 7$$

→ On ajoute 8 à chaque membre.

$$x \geq -\frac{7}{4}$$

→ On divise chaque membre par -4 .
Comme -4 est un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont les
nombres supérieurs
ou égaux à $-\frac{7}{4}$.

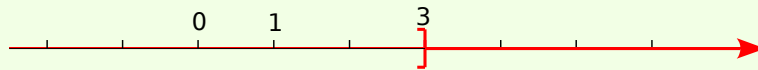
→ On conclut en décrivant les solutions.

Méthode 3 : Représenter les solutions d'une inéquation sur une droite graduée

À connaître

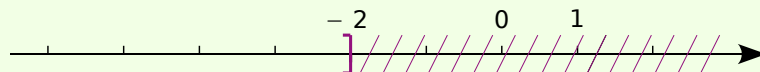
Dans la représentation des solutions sur une droite graduée, si un crochet est **tourné vers les solutions** alors le nombre correspondant **fait partie des solutions**.
Si le crochet est **tourné vers l'extérieur** alors le nombre correspondant **ne fait pas partie des solutions**.

Exemple 1 : Sur une droite graduée, représente en rouge les nombres solutions de l'inéquation $x > 3$.



Le crochet n'est pas tourné vers les solutions car le nombre 3 n'est pas solution.

Exemple 2 : Sur une droite graduée, hachure les nombres qui ne sont pas solutions de l'inéquation $x \leq -2$.



Le crochet est tourné vers les solutions car le nombre -2 est une solution.

CHAPITRE N6 : PUISSANCES ET GRANDEURS QUOTIENTS

Méthode 1 : Utiliser les formules sur les puissances.

À connaître

Pour tout nombre relatif a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$$a^m \times a^p = a^{m+p} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \quad \text{et} \quad (a^m)^p = a^{m \times p}.$$

Exemple 1 : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$$A = 5^7 \times 5^4 ; \quad B = \frac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}} ; \quad C = (0,2^{-3})^4 ; \quad D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi.$$

$$A = 5^7 \times 5^4 = 5^{7+4} = 5^{11} \quad B = \frac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}} = (-2)^{-5-(-6)} = (-2)^{-5+6} = (-2)^1 = (-2)$$

$$C = (0,2^{-3})^4 = 0,2^{-3 \times 4} = 0,2^{-12} \quad D = \pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi = \pi^{2+(-3)+1} = \pi^0 (= 1)$$

Exemple 2 : Écris le nombre $E = \frac{(-2)^4 \times 4^{-5}}{8^{-3}}$ sous la forme d'une puissance de 2.

$$E = \frac{(-2)^4 \times (2^2)^{-5}}{(2^3)^{-3}}$$

On remplace 4 par 2^2 et 8 par 2^3 .

$$E = \frac{2^4 \times 2^{-10}}{2^{-9}}$$

On remarque que $(-2)^4 = 2^4$ et on applique les règles sur les puissances.

$$E = 2^{4+(-10)-(-9)}$$

$$E = 2^{4-10+9}$$

$$E = 2^3$$

On donne l'écriture demandée par l'énoncé.

À connaître

Pour tous nombres relatifs a et b non nuls et pour tout nombre entier relatif n :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Exemple : Écris les expressions suivantes sous la forme a^n où a est un nombre relatif non nul et n un entier relatif.

$$F = 2^3 \times 5^3 ; \quad G = \frac{1,5^{-5}}{0,5^{-5}} ; \quad H = (-6)^{-5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} ; \quad I = \frac{\pi^4}{7^4}.$$

$$F = 2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 \quad G = \frac{1,5^{-5}}{0,5^{-5}} = \left(\frac{1,5}{0,5}\right)^{-5} = 3^{-5}$$

$$H = (-6)^{-5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-6 \times \frac{1}{3}\right)^{-5} = (-2)^{-5} \quad I = \frac{\pi^4}{7^4} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^4$$

Méthode 2 : Effectuer des changements d'unités de grandeurs produits ou quotients

Exemple 1 : Le 3 avril 2007, la rame TGV d'essai n°4402 établissait un nouveau record de vitesse officiel de $574,8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Convertis cette vitesse en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$574,8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ signifie que l'on parcourt $574,8 \text{ km}$ en 1 h .

Ainsi, $574,8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{574,8 \text{ km}}{1 \text{ h}}$.

$574,8 \text{ km} = 574\,800 \text{ m}$ et $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$.

Donc $574,8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{574\,800 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{574\,800}{3\,600} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = \frac{479}{3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 159,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La vitesse de cette rame de TGV était alors d'environ $159,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Exemple 2 : La vitesse de rotation du disque dur d'un ordinateur est de $7\,200 \text{ tours/min}$. Convertis cette vitesse de rotation en tours par seconde.

$7\,200 \text{ tours/min}$ signifie qu'en une minute, la partie rotative du disque dur effectue $7\,200 \text{ tours}$ autour de son axe.

$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$.

Donc $7\,200 \text{ tours/min} = \frac{7\,200 \text{ tours}}{1 \text{ min}} = \frac{7\,200 \text{ tours}}{60 \text{ s}} = \frac{7\,200}{60} \text{ tours/s} = 120 \text{ tours/s}$.

La vitesse de rotation du disque dur est de 120 tours/s .

Exemple 3 : La masse volumique du fer vaut $7,84 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Convertis-la en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

La masse volumique du fer vaut $7,84 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ signifie que 1 cm^3 de fer a une masse de $7,84 \text{ g}$. Ainsi, $7,84 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} = \frac{7,84 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3}$.

$7,84 \text{ g} = 0,007\,84 \text{ kg}$ et $1 \text{ cm}^3 = 0,000\,001 \text{ m}^3$.

Donc $7,84 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} = \frac{0,007\,84 \text{ kg}}{0,000\,001 \text{ m}^3} = \frac{0,007\,84}{0,000\,001} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} = 7\,840 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

La masse volumique du fer vaut donc $7\,840 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Exemple 4 : Combien de litres d'eau faut-il pour remplir à ras bord une piscine de 75 m^3 ?

$75 \text{ m}^3 = 75 \times 1 \text{ m}^3 = 75 \times (1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}) = 75 \times (10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm})$.

$10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 10^3 \times \text{dm}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$.

Donc $75 \text{ m}^3 = 75 \times 1\,000 \text{ dm}^3 = 75\,000 \text{ dm}^3$.

Comme $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, il faut $75\,000 \text{ L}$ d'eau pour remplir cette piscine.

Exemple 5 : Une unité industrielle d'énergie est le mégawattjour (MWj) soit l'énergie correspondant à une puissance d'un mégawatt (MW) fournie pendant un jour. Sachant que $1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$, détermine le nombre de kilowattheures (kWh) qui correspond à un mégawattjour.

$1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W} = 1\,000\,000 \text{ W} = 1\,000 \text{ kW}$ et $1 \text{ j} = 24 \text{ h}$.

Donc $1 \text{ MWj} = 1 \text{ MW} \times 1 \text{ j} = 1\,000 \text{ kW} \times 24 \text{ h} = 24\,000 \text{ kWh}$.

Donc 1 MWj correspond à $24\,000 \text{ kWh}$.

CHAPITRE N7 : NOTION DE FONCTION

Méthode 1 : Déterminer l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction définie par un tableau

Exemple : On donne un **tableau de valeurs** de la fonction h . Quelle est l'**image** de 8 par la fonction h ? Trouve un **antécédent** de -125 .

x	- 5,25	- 3	- 1,75	0	2	5,5	8
$h(x)$	- 358	- 125	3	7	12,5	3	20

La deuxième ligne du tableau donne l'**image** des nombres de la première ligne par la fonction h .

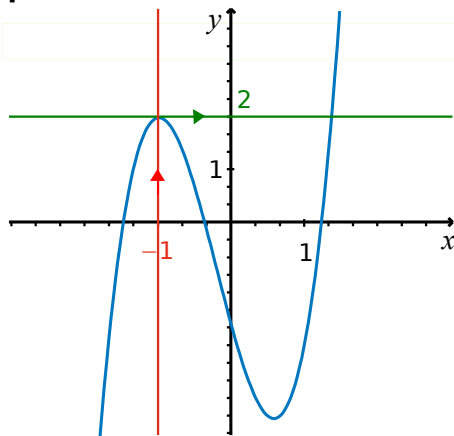
Pour trouver l'**image** de 8 : on cherche 8 sur la première ligne du tableau et on lit son **image** sur la deuxième ligne ; l'**image** de 8 est 20 et on écrit $h(8) = 20$.

On peut également noter $h : 8 \mapsto 20$.

Pour trouver le ou les **antécédent(s)** de -125 : on cherche -125 sur la deuxième ligne du tableau et on lit le ou les **antécédent(s)** sur la première ligne ; l'**antécédent** de -125 est -3 et on écrit $h(-3) = -125$ (ou $h : -3 \mapsto -125$).

Méthode 2 : Déterminer l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction définie par une courbe

Exemple 1 : On donne la courbe d'une fonction f . Détermine l'image de -1 .



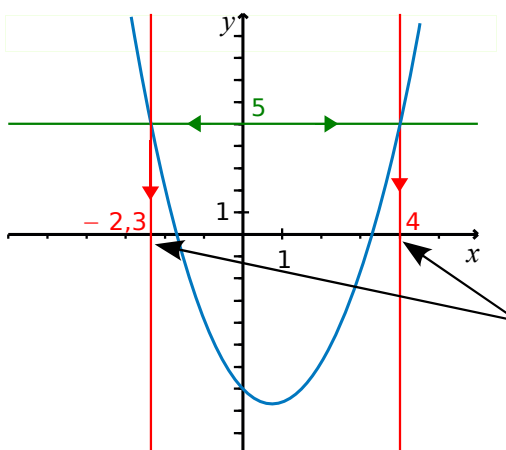
Je trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(-1 ; 0)$.

Je trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et qui passe par le point d'intersection de la courbe et de la droite précédente.

Elle coupe l'axe des ordonnées approximativement au point de coordonnées $(0 ; 2)$.

On en déduit que l'image de -1 par la fonction f est environ 2 donc $f(-1) \approx 2$.

Exemple 2 : On donne la courbe d'une fonction g . Détermine le ou les antécédent(s) de 5.



Je trace la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0 ; 5)$.

Je trace la (les) droite(s) parallèle(s) à l'axe des ordonnées passant par le(s) point(s) d'intersection de la courbe et de la droite précédente.

Ces parallèles (deux, ici) coupent l'axe des abscisses approximativement aux points de coordonnées $(4 ; 0)$ et $(-2,3 ; 0)$.

Donc 5 a deux antécédents par la fonction g qui sont, environ, 4 et $-2,3$.

On écrit $g(4) \approx 5$ et $g(-2,3) \approx 5$.

Méthode 3 : Déterminer l'image d'un nombre par une fonction définie par une formule

Exemple : Soit la fonction $f: x \mapsto 3x^2 - 7x + 12$. Quelle est l'image de -5 ?

$2 \mapsto 10$ par la fonction f signifie qu'au nombre 2, la fonction associe le nombre 10. On dit que 10 est l'**image** de 2 par la fonction f et on note $f(2) = 10$.

$x \mapsto 3x^2 - 7x + 12$ signifie qu'à tout nombre, ici noté x , la fonction f associe un unique nombre qui se calcule avec cette formule : $3x^2 - 7x + 12$. On dit que l'**image** de x par la fonction f est $3x^2 - 7x + 12$ et on note aussi $f(x) = 3x^2 - 7x + 12$.

Calcul de l'image de -5 par f avec $f(x) = 3x^2 - 7x + 12$.

$$f(-5) = 3 \times (-5)^2 - 7 \times (-5) + 12 \quad \longrightarrow \text{On remplace } x \text{ par } -5.$$

$$f(-5) = 75 + 35 + 12 \quad \longrightarrow \text{On calcule.}$$

$$f(-5) = 122$$

Donc l'image de -5 par la fonction f est 122. On écrit aussi $f(-5) = 122$.

CHAPITRE N8 : FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES

Méthode 1 : Déterminer, par le calcul, l'image d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

À connaître

Soient a et b deux nombres.

On appelle **fonction affine** la fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x + b$).

On appelle **fonction linéaire** de coefficient a la fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x$).

Remarque : une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).

Exemple : On définit les fonctions f et g respectivement par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x - 2$.
Calcule l'image de 3 par la fonction f et l'image de -7 par la fonction g .

Calcul de l'image de 3 par la fonction linéaire f avec $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} f(3) &= 2 \times 3 && \text{On remplace } x \text{ par } 3. \\ f(3) &= 6 && \text{On calcule.} \end{aligned}$$

L'image de 3 par la fonction f est 6.

Calcul de l'image de -7 par la fonction affine g avec $g(x) = 5x - 2$

$$\begin{aligned} g(-7) &= 5 \times (-7) - 2 \\ g(-7) &= -37. \end{aligned}$$

L'image de -7 par la fonction g est -37 .

Méthode 2 : Déterminer, par le calcul, l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : On définit les fonctions f et g par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x - 2$.
Calcule l'antécédent de 7 par la fonction f et l'antécédent de 13 par la fonction g .

Calcul de l'antécédent de 7 par la fonction f avec $f(x) = 2x$

On cherche le nombre x qui a pour image 7 par la fonction f .

L'image de x est $f(x)$ donc on résout l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 \\ 2x &= 7 \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

L'antécédent de 7 par f est donc 3,5.
Ainsi $f(3,5) = 7$.

Calcul de l'antécédent de 13 par la fonction g avec $g(x) = 5x - 2$

On cherche le nombre x qui a pour image 13 par la fonction g .

L'image de x est $g(x)$, on résout donc l'équation $g(x) = 13$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 13 \\ 5x &= 25 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

L'antécédent de 13 par g est donc 5.
Ainsi $g(5) = 13$.

Méthode 3 : Représentation graphique d'une fonction affine ou linéaire

À connaître

Un repère étant défini, dire qu'un point appartient à la **représentation graphique de la fonction affine** $f : x \mapsto ax + b$ signifie que ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient la relation $y = f(x)$ c'est-à-dire $y = ax + b$.

La représentation graphique **d'une fonction affine** est une droite.

Dans le cas de la **fonction linéaire**, cette droite passe par l'origine du repère.

Remarque : a s'appelle le **coefficient directeur**, il donne la direction de la droite représentative : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente de 1 (c'est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et de x).

b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$, la droite passe par le point $(0 ; b)$.

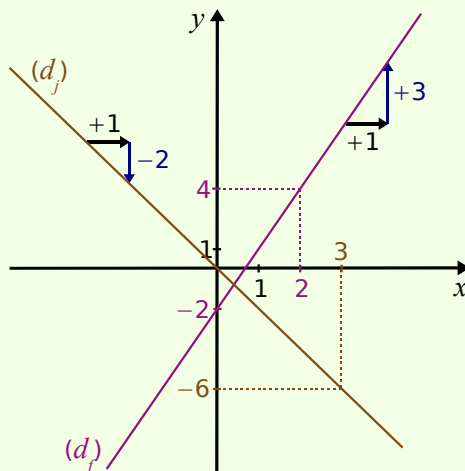
Exemple : Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$ et la fonction j définie par $j : x \mapsto -2x$.

f est affine donc sa représentation graphique est une droite.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître deux de ses points.

On établit un tableau de valeurs en calculant les images de deux nombres.

Valeurs de x	0	2
Valeurs de $f(x)$	-2	4
Points de la droite	$(0 ; -2)$	$(2 ; 4)$



j est linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

Pour tracer cette droite, il suffit de connaître un de ses points : on calcule l'image d'un nombre.

Valeurs de x	3
Valeurs de $j(x)$	-6
Points de la droite	$(3 ; -6)$

On trace un repère en notant l'origine, le sens et les unités sur les deux axes.

- Pour la fonction f , en violet :

on place dans le repère les points de coordonnées $(0 ; -2)$ et $(2 ; 4)$.

On trace la droite (d_f) passant par ces deux points.

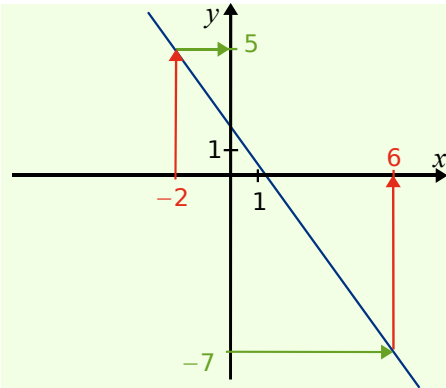
- Pour la fonction j , en marron :

on place dans le repère le point de coordonnées $(3 ; -6)$.

On trace la droite (d_j) passant par ce point et l'origine du repère.

Méthode 4 : Déterminer graphiquement l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Exemple : Voici le graphique d'une fonction affine notée q .
Lis l'image de -2 et l'antécédent de -7 .



Pour lire l'image de -2 :

L'image de -2 est l'ordonnée du point de la droite d'abscisse -2 .
On lit approximativement 5 . Donc l'image de -2 par la fonction q est environ 5 .

Pour lire l'antécédent de -7 :

L'antécédent de -7 est l'abscisse du point de la droite d'ordonnée -7 .
On lit approximativement 6 . Donc l'antécédent de -7 par la fonction q est environ 6 .

Méthode 5 : Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire ou affine

Exemple 1 : Détermine la fonction linéaire f telle que $f(5) = 4$.

f étant linéaire, on a $f(x) = ax$ où a est le coefficient de cette fonction à déterminer.
 $f(5) = 4$ et $f(5) = 5a$ donc $5a = 4$. On en déduit $a = \frac{4}{5}$ et f est définie par $f(x) = \frac{4}{5}x$.

Exemple 2 : Détermine la fonction affine g telle que $g(5) = 4$ et $g(-2) = 25$.

La fonction g est affine donc $g(x) = ax + b$ où a et b sont à déterminer.

$$g(5) = 4 \text{ et } g(5) = 5a + b \text{ donc } 5a + b = 4.$$

$$g(-2) = 25 \text{ et } g(-2) = -2a + b \text{ donc } -2a + b = 25.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} 5a + b = 4 \\ -2a + b = 25 \end{cases}$$

On résout donc le système et on obtient $a = -3$ et $b = 19$.

Ainsi g est définie par $g(x) = -3x + 19$.

Remarque : a est le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $g(x)$

et de x donc, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, $a = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$.

$$\text{Donc, ici, } a = \frac{g(-2) - g(5)}{-2 - 5} = \frac{25 - 4}{-2 - 5} = \frac{21}{-7} = -3 \text{ et } g(x) = -3x + b.$$

b s'obtient ensuite en utilisant $g(5) = 4$ ou $g(-2) = 25$.

CHAPITRE N9 : STATISTIQUES ET PROBABILITES

Méthode 1 : Déterminer des caractéristiques d'une série statistique donnée sous forme de liste ou de tableau

À connaître

On appelle **médiane** m d'une série statistique dont les valeurs sont ordonnées tout nombre qui partage cette série en deux groupes de même effectif.

Le **premier quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur Q_1 telle qu'au moins 25 % des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 .

Le **troisième quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur Q_3 telle qu'au moins 75 % des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3 .

L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par cette série.

Exemple 1 : Voici le temps consacré, en minutes, au petit-déjeuner par 16 personnes.

16 12 1 9 17 19 13 10 4 8 7 8 14 12 14 9

Détermine une valeur médiane, les valeurs des premier et troisième quartiles ainsi que l'étendue de cette série statistique.

On commence par ranger les 16 valeurs dans l'ordre croissant.

1 4 7 **8** 8 9 9 **10 12** 12 13 **14** 14 16 17 19

- Tout nombre compris entre la 8^e et la 9^e valeur peut être considéré comme médiane. En général, on prend la demi-somme de ces deux valeurs : $m = 11$ (la moitié de ce groupe consacre moins de 11 minutes au petit-déjeuner).
- 25 % et 75 % de 16 sont égaux à 4 et 12 donc le premier quartile est la 4^e valeur, soit $Q_1 = 8$, et le troisième quartile est la 12^e valeur, soit $Q_3 = 14$.
- $19 - 1 = 18$ donc l'étendue est 18.

Exemple 2 : On donne la répartition des notes à un contrôle dans une classe de 27 élèves.

Note sur 20	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	3	5	2	1	6	3	3	2

Détermine une valeur médiane, les valeurs des premier et troisième quartiles ainsi que l'étendue de cette série statistique.

On commence par calculer les effectifs cumulés croissants.

Note sur 20	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif cumulé	2	5	10	12	13	19	22	25	27

- L'effectif total est de 27, la médiane est donc la 14^e valeur : $m = 12$. Il y a autant d'élèves qui ont obtenu une note inférieure ou égale à 12 que d'élèves qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 12.
- 25 % et 75 % de 27 sont égaux à 6,75 et 20,25 donc le premier quartile est la 7^e valeur, soit $Q_1 = 9$, et le troisième quartile est la 21^e valeur, soit $Q_3 = 13$.
- $15 - 7 = 8$ donc l'étendue est 8.

Méthode 2 : Calculer des probabilités

Exemple 1 : Détermine la probabilité de tirer un as ou un trèfle dans un jeu de 32 cartes.

Dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre as et huit trèfles (dont un as). Il y a donc onze chances sur 32 de tirer un as ou un trèfle soit une probabilité de $\frac{11}{32}$.

Exemple 2 : Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu.

Fabio réussit sa première balle de service dans 65 % des cas. S'il a échoué la première, il réussit la seconde dans 80 % des cas. Quelle est la probabilité pour qu'il commette une double faute (c'est-à-dire qu'il échoue deux fois de suite) ?

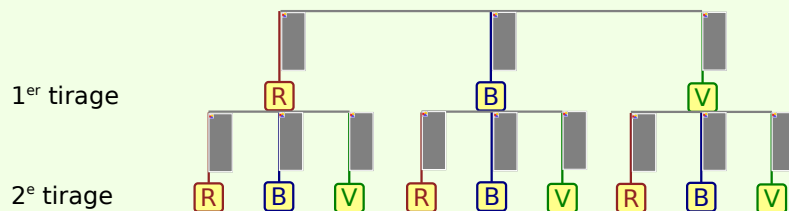
Ce joueur réussit sa première balle de service dans 65 % des cas, ce qui signifie qu'il échoue dans 35 % des cas.

Parmi ces 35 % de cas-là, il réussit sa deuxième balle de service dans 80 % des cas, ce qui signifie qu'il échoue une nouvelle fois dans 20 % des cas.

Ainsi, 20 % de 35 % des mises en jeu effectuées ne sont pas réussies. La probabilité pour qu'il commette une double faute est donc de $\frac{20}{100} \times \frac{35}{100}$ soit $\frac{7}{100}$ (autrement dit, Fabio commet une double faute dans 7 % des cas).

Exemple 3 : Dans une urne, il y a cinq boules rouges (R), deux boules bleues (B) et une boule verte (V), indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules. Détermine la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

On peut représenter tous les résultats sur un arbre en indiquant sur les branches correspondantes la probabilité de chaque résultat lors des deux tirages (l'expérience s'effectuant sans remise, il restera sept boules au second tirage).



On suppose que l'on reproduit un grand nombre de fois l'expérience : dans $\frac{5}{8}$ des cas, on obtiendra R au premier tirage et dans $\frac{4}{7}$ de ces cas, on obtiendra R une nouvelle fois lors du deuxième tirage. Donc, il y aura $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$ soit $\frac{20}{56}$ des expériences qui donneront comme résultat (R, R).

De même, il y aura $\frac{2}{8} \times \frac{1}{7}$ soit $\frac{2}{56}$ des expériences qui donneront comme résultat (B, B) et $\frac{1}{8} \times \frac{0}{7}$ soit aucune expérience ne donnera comme résultat (V, V).

La proportion d'expériences donnant deux boules de même couleur est donc de $\frac{20}{56} + \frac{2}{56}$ soit $\frac{22}{56}$. La probabilité d'obtenir la même couleur est donc $\frac{22}{56}$.