Nom : ____________________________

Prénom : ________________________

Cinquième

Leçons

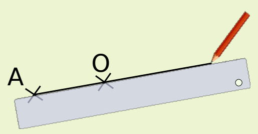
CHAPITRE G1 : SYMETRIE CENTRALE

Méthode 1 : Construire le symétrique d'un point

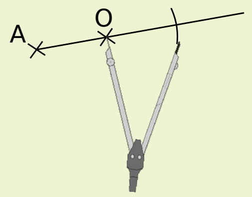
À connaître

> **Deux points A et A' sont symétriques par rapport à O** lorsque O est le milieu du segment [AA'].

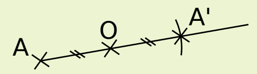
Exemple : Trace le point A' tel que les points A et A' soient symétriques par rapport à O.



On trace la demi-droite [AO).



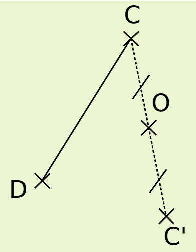
On trace un arc de cercle de centre O et de rayon OA. Il coupe la demi-droite [AO) en un point.



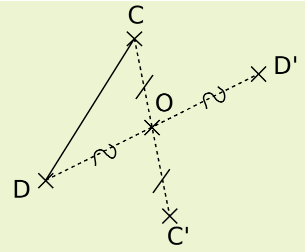
On place le point A' à l'intersection de la demi-droite [AO) et de l'arc de cercle. On code la figure.

Méthode 2 : Construire le symétrique d'un segment

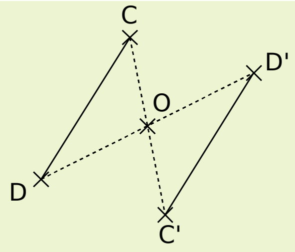
Exemple : Trace le segment [C'D'] symétrique du segment [CD] par rapport à O.



On construit le point C' symétrique du point C par rapport au point O.



On construit le point D' symétrique du point D par rapport au point O.

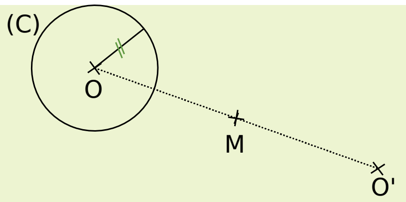


On trace le segment [C'D'].

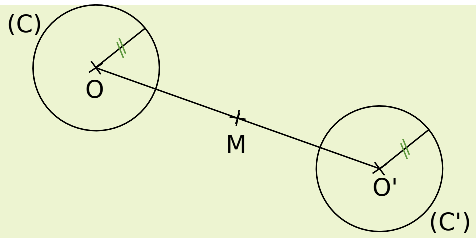
Remarque : Pour construire le symétrique d'une droite par rapport à un point, on choisit deux points sur la droite et on construit leurs symétriques. On trace ensuite la droite passant par ces deux points.

Méthode 3 : Construire le symétrique d'un cercle

Exemple : Soit (C) un cercle de centre O, trace le cercle (C') symétrique de (C) par rapport à M.



On construit le point O' symétrique du point O par rapport au point M.



On obtient le cercle (C') en traçant le cercle de centre O' et de même rayon que le cercle (C).

Remarque : Pour un arc de cercle, on construit les symétriques du centre et des extrémités de l'arc puis on trace l'arc de cercle de même rayon.

Méthode 4 : Utiliser les propriétés de la symétrie centrale

À connaître

Si deux segments sont symétriques par rapport à un point alors **ils ont la même longueur**.

Si deux angles sont symétriques par rapport à un point alors **ils ont la même mesure**.

La symétrie centrale **conserve le périmètre et l'aire**.

Exemple : Un triangle PIC a un périmètre de 16,4 cm. Quel est le périmètre du triangle PI'C' image de PIC par la symétrie de centre P ? Justifie ta réponse.

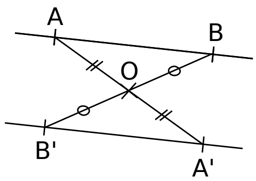
Les triangles PIC et PI'C' sont symétriques par rapport à un point : ils ont donc le même périmètre, c'est à dire 16,4 cm.

Méthode 5 : Justifier que deux droites sont parallèles

À connaître

Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors **elles sont parallèles**.

Exemple : Sur la figure ci-contre, les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport au point O. Que peut-on dire des droites (AB) et (A'B') ?



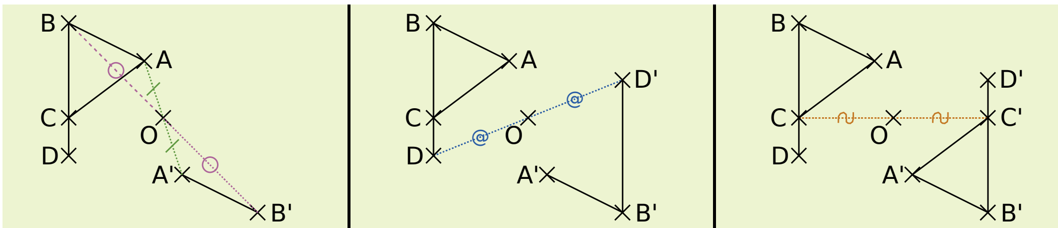
Les droites (AB) et (A'B') sont symétriques par rapport au point O donc elles sont parallèles.

Méthode 6 : Construire le symétrique d'une figure

À connaître

Deux figures symétriques par rapport à un point sont superposables après un demi-tour autour de ce point.

Exemple : Construis le symétrique de la figure ABCD par rapport au point O.



On construit les points A' et B', symétriques des points A et B par rapport à O. On trace le segment [A'B'].

On construit le point D', symétrique du point D par rapport à O. On trace le segment [B'D'].

On construit le point C', symétrique du point C par rapport à O. On trace le segment [A'C'].

Remarque :

- On peut aussi construire d'abord les points A', B' et D', et obtenir le point C' en reportant la longueur AC à partir du point A' (ou la longueur BC à partir du point B').
- La figure formée par ABCD et A'B'C'D' est son propre symétrique par rapport à O, on dit que O est le centre de symétrie de cette figure.

CHAPITRE G2 : TRIANGLE

Méthode 1 : Utiliser la somme des angles d'un triangle

À connaître

Dans un triangle, **la somme des mesures des angles** vaut 180°.

Exemple : Le triangle PAF est tel que $\widehat{PAF}$ = 67° et $\widehat{FPA}$ = 56°. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PFA}$?

La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.
$\widehat{PAF}$ + $\widehat{FPA}$ = 67° + 56° = 123°.
$\widehat{PFA}$ = 180° - 123° = 57°.

Méthode 2 : Utiliser l'inégalité triangulaire

À connaître

Dans un triangle, **la longueur d'un côté** est toujours **inférieure** à **la somme des longueurs des deux autres côtés**.
Lorsqu'il y a égalité, les trois points sont alignés.

Remarque : Pour vérifier si on peut construire un triangle, il suffit de vérifier que la plus grande longueur est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple 1 : Peut-on construire le triangle COR avec CO = 5 cm ; OR = 6 cm et RC = 4 cm ?

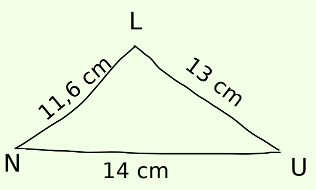
[OR] est le plus grand côté (OR = 6 cm).
Donc on calcule RC + CO = 4 + 5 = 9 .
Comme OR < RC + CO, le triangle COR est constructible.

Exemple 2 : Écris les trois inégalités pour le triangle BOL.

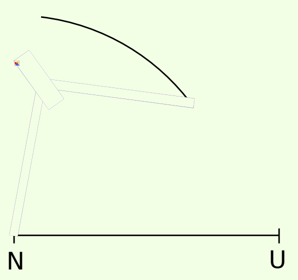
Dans le triangle BOL, on a :
BO < BL +OL ;
OL < BO + BL ;
LB < OB + OL.

Méthode 3 : Construire un triangle connaissant les longueurs des côtés

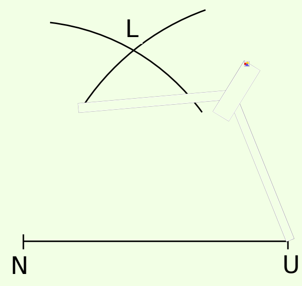
Exemple : Construis le triangle NUL tel que NU = 14 cm ; UL = 13 cm et LN = 11,6 cm.



On effectue une figure à main levée.



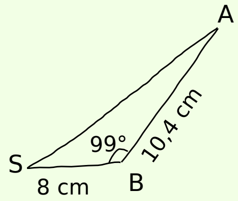
On construit un segment [NU] de 14 cm. On trace un arc de cercle de centre N et de 11,6 cm de rayon.



On trace un arc de cercle de centre U et de 13 cm de rayon. L'intersection des arcs est le point L.

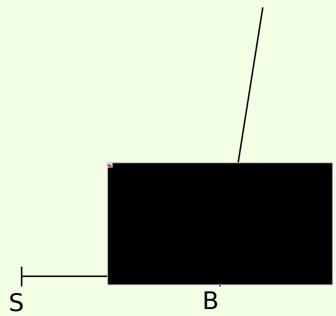
Méthode 4 : Construire un triangle connaissant un angle et les longueurs de ses côtés adjacents

Exemple : Construis un triangle BAS tel que AB = 10,4 cm ; BS = 8 cm et $\widehat{ABS}$ = 99°.

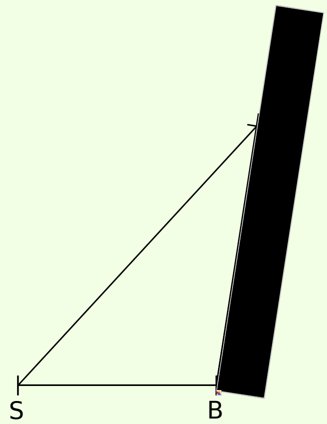


On effectue une figure à main levée en respectant la nature des angles.

On construit un segment [SB] de 8 cm de longueur.



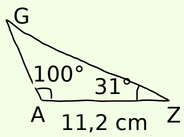
On trace un angle de sommet B mesurant 99°.



On place le point A à 10,4 cm du point B.

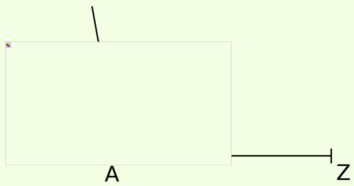
Méthode 5 : Construire un triangle connaissant deux angles et la longueur de leur côté commun

Exemple : Construis le triangle GAZ tel que AZ = 11,2 cm ; $\widehat{GAZ}$ = 100° et $\widehat{AZG}$ = 31°.



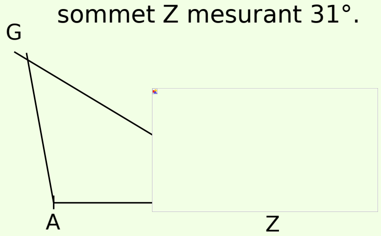
On effectue une figure à main levée.

On trace un segment [AZ] de longueur 11,2 cm.



On construit un angle de sommet A mesurant 100°.

On construit un angle de sommet Z mesurant 31°.



L'intersection des côtés des angles est le point G.

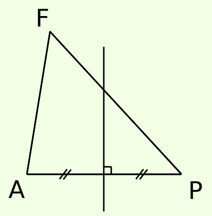
Méthode 6 : Construire le cercle circonscrit à un triangle

À connaître

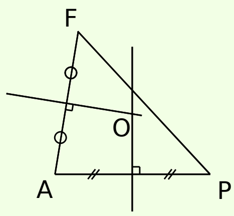
Les trois médiatrices d'un triangle sont **concourantes**.
Leur point de concours est **le centre du cercle circonscrit au triangle.** Ce cercle passe par les trois sommets du triangle.

Remarque : Il suffit de tracer deux médiatrices pour déterminer le centre du cercle.

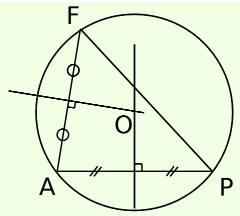
Exemple : Trace le cercle circonscrit au triangle PAF.



On construit la médiatrice du segment [AP].



On construit la médiatrice du segment [FA]. Soit O le point d'intersection des deux médiatrices.



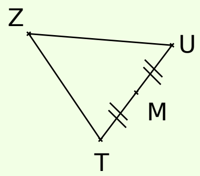
Le cercle circonscrit est le cercle de centre O et de rayon OA (ou OF ou OP).

Méthode 7 : Construire les médianes d'un triangle

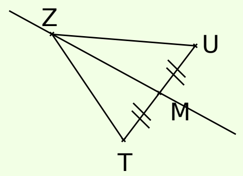
À connaître

Dans un triangle, **une médiane** est une droite qui passe par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé.

Exemple : Construis la médiane issue de Z dans le triangle ZUT.



On détermine le milieu du côté opposé à Z c'est à dire le milieu du segment [UT].



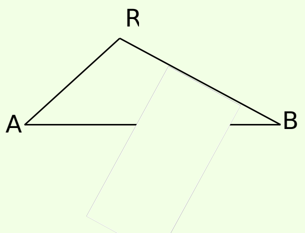
On trace la droite qui passe par le sommet Z et par le point M.

Méthode 8 : Construire les hauteurs d'un triangle

À connaître

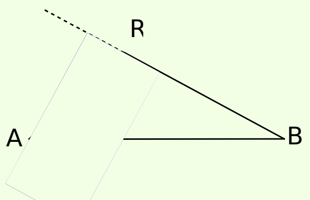
Dans un triangle, **une hauteur** est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Exemple : Trace la hauteur relative au côté [BR].

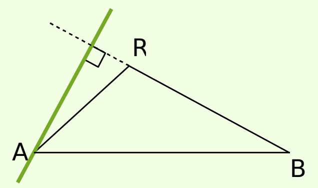


On positionne l'équerre perpendiculairement au côté [BR].

On fait glisser l'équerre jusqu'au point A.



Il faut parfois prolonger le côté [BR].

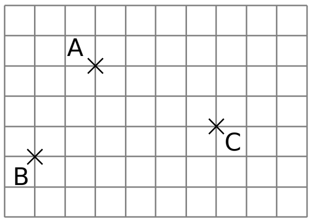


La hauteur relative au côté [BR] est la droite perpendiculaire au côté [BR] et passant par A.

CHAPITRE G3 : PARALLELOGRAMME

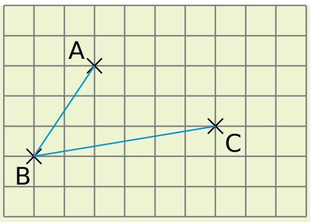
Méthode 1 : Construire un parallélogramme dans un quadrillage

Exemple : Soient trois points A, B et C non alignés placés comme ci-contre. Place le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

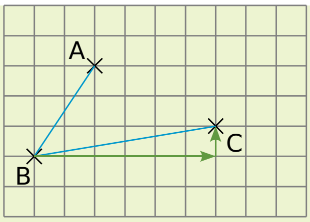


Cela peut être résolu de deux façons différentes :

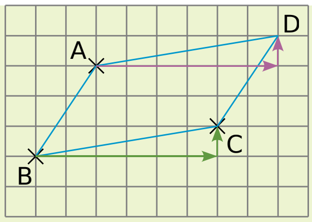
En utilisant une propriété des côtés d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses côtés [BC] et [AD] sont de même longueur et parallèles.

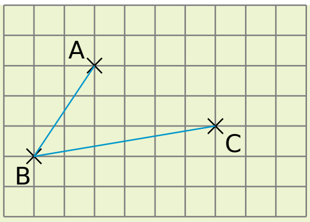


Pour aller de B à C, on se déplace de 6 carreaux vers la droite et de 1 carreau vers le haut.

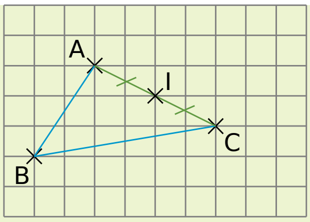


On reproduit ces mêmes déplacements à partir de A. Ainsi on obtient un quadrilatère non croisé tel que AD = BC et (AD) // (BC), c'est donc bien un parallélogramme.

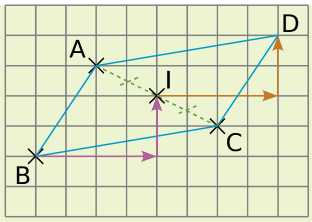
En utilisant la propriété des diagonales d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu qu'on appelle I.



On trace le segment [AC] et on place son milieu I. C'est également le milieu du segment [BD].



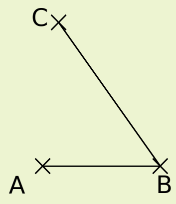
On place D tel que I soit le milieu du segment [BD] en comptant les carreaux.
Ainsi ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est donc bien un parallélogramme.

Méthode 2 : Construire un parallélogramme avec des instruments de géométrie

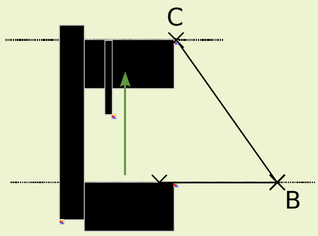
Exemple : Soient trois points A, B et C non alignés. Place le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Cela peut être résolu de plusieurs façons différentes, en voici deux :

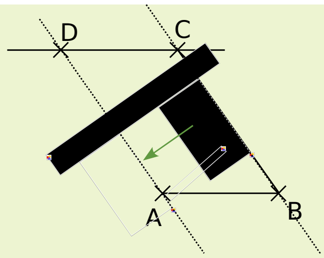
En utilisant une propriété des côtés d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont parallèles deux à deux : soit (AB)//(CD) et (BC)//(AD).

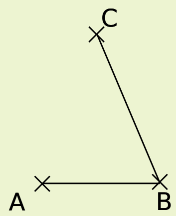


On trace la parallèle à (AB) passant par C.

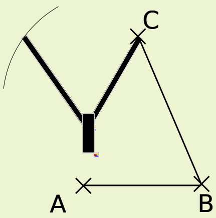


On trace la parallèle à (BC) passant par A. Ces deux droites sont sécantes en D.
Ainsi ABCD a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est donc bien un parallélogramme.

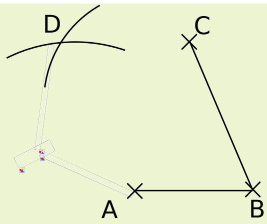
En utilisant une autre propriété des côtés d'un parallélogramme



On trace les côtés [AB] et [BC] de ABCD.
ABCD est un parallélogramme donc ses côtés opposés [AB] et [CD] sont de la même longueur deux à deux : soit AB = CD et BC = AD.



À l'aide du compas, on reporte la longueur AB à partir du point C.

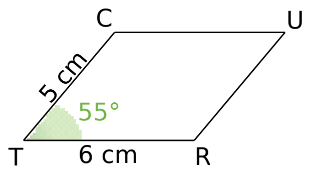


On reporte la longueur BC à partir du point A. On place le point D à l'intersection des deux arcs de cercle puis on trace les côtés [AD] et [CD].
Ainsi ABCD a ses côtés opposés égaux deux à deux, c'est donc bien un parallélogramme.

Méthode 3 : Utiliser les propriétés d'un parallélogramme

À connaître

Les propriétés sont du type :
« Si un quadrilatère est un parallélogramme alors … . ».



Exemple : TRUC est un parallélogramme tel que CT = 5 cm, TR = 6 cm et $\widehat{CTR}$ = 55°. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CUR}$. Justifie.

Recherche :

❶ On sait que TRUC est un parallélogramme donc on dispose de toutes les propriétés de ce quadrilatère.	❷ On demande la mesure d'un angle, on utilise donc une propriété sur les angles du parallélogramme.

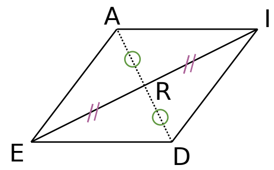
Démonstration :

Données	Propriété	Conclusion
On sait que TRUC est un parallélogramme et que $\widehat{CTR}$ = 55°.	Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même longueur.	Donc $\widehat{CTR}$ = $\widehat{CUR}$ = 55°.

Méthode 4 : Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

À connaître

Les propriétés sont du type :
« Si un quadrilatère a … alors c'est un parallélogramme. ».



Exemple : Soit IDE un triangle et R le milieu du segment [EI]. On a tracé le point A, symétrique de D par rapport à R. Démontre que AIDE est un parallélogramme.

Recherche :

❶ On sait que AIDE est un quadrilatère. On sait de plus que R est le milieu de la diagonale [EI] de ce quadrilatère et qu'il est également le milieu de la diagonale [AD] car D et A sont symétriques par rapport à R.	❷ On cherche donc une propriété qui permet de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme en utilisant ses diagonales.

Démonstration :

Données	Propriété	Conclusion
On sait que R est le milieu de [EI]. On sait que A et D sont symétriques par rapport à R donc R est aussi le milieu de [AD].	Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.	Donc AIDE est un parallélogramme.

Méthode 5 : Construire un quadrilatère particulier par ses diagonales

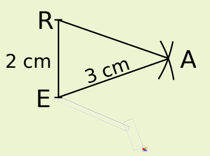
À connaître

Si un parallélogramme a ses **diagonales de même longueur**
alors c'est un **rectangle**.

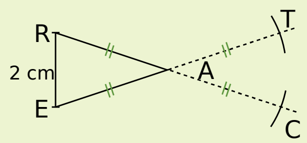
Si un parallélogramme a ses **diagonales perpendiculaires**
alors c'est un **losange**.

Si un parallélogramme a ses **diagonales de même longueur et perpendiculaires**
alors c'est un **carré**.

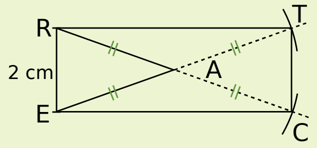
Exemple 1 : Dessine un rectangle RECT de centre A dont les diagonales mesurent 6 cm et tel que RE = 2 cm.



Le quadrilatère RECT est un rectangle donc ses diagonales ont même milieu et même longueur. On construit le triangle REA isocèle en A tel que RE = 2 cm et AE = 3 cm.

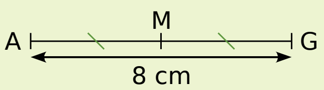


On construit alors les points C et T symétriques respectifs de R et de E par rapport à A.

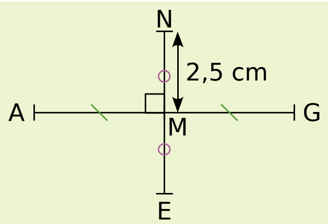


On termine le rectangle en traçant les segments [RT], [TC] et [EC].
Ainsi RECT a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et de la même longueur, c'est donc bien un rectangle.

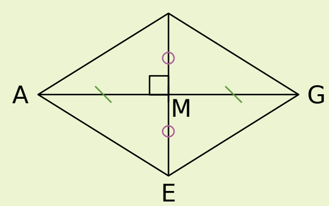
Exemple 2 : Dessine un losange ANGE de centre M dont les diagonales vérifient AG = 8 cm et NE = 5 cm.



Le quadrilatère ANGE est un losange donc ses diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires.
On trace la diagonale [AG] et on place son milieu M.



On trace la perpendiculaire à (AG) passant par M et on place les points N et E sur cette droite à 2,5 cm du point M.



On relie les points A, N, G et E pour former le losange.
Ainsi ANGE a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et perpendiculaires, c'est donc bien un losange.

Remarque : Pour construire un carré, on utilise la même méthode que pour le losange, les diagonales étant en plus de même longueur.

Méthode 6 : Utiliser les propriétés d'un rectangle, d'un losange ou d'un carré

Exemple : MATH est un rectangle de centre I. Démontre que le triangle MAI est un triangle isocèle en I.

Recherche :

❶ On parle d'un rectangle et de son centre. Le triangle MAI fait intervenir les demi-diagonales du rectangle.	❷ On s'oriente donc vers une propriété des diagonales du rectangle.

Démonstration :

Données	Propriété	Conclusion
On sait que MATH est un rectangle de centre I.	Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont même longueur et même milieu.	Donc MT = AH puis $\frac{MT}{2} = \frac{AH}{2}$, d'où MI = AI. Comme le triangle MAI a deux côtés égaux, il est isocèle en I.

Méthode 7 : Démontrer qu'un parallélogramme est un rectangle, un losange ou un carré

À connaître

Si un parallélogramme a **un angle droit**
alors c'est un **rectangle**.

Si un parallélogramme a **deux côtés consécutifs de même longueur**
alors c'est un **losange**.

Si un parallélogramme a **un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur** alors c'est un **carré**.

Exemple : ABCD est parallélogramme tel que ABD est un triangle isocèle en A. Démontre que ABCD est un losange.

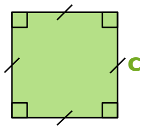
Démonstration :

Données	Propriété	Conclusion
ABD est un tiangle isocèle en A donc les côtés [AB] et [AD] sont de même longueur. ABCD est donc un parallélogramme avec deux côtés consécutifs [AB] et [AD] de même longueur.	Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.	Donc ABCD est un losange.

CHAPITRE G4 : AIRES ET PERIMETRES

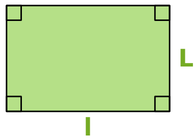
Méthode 1 : Calculer l'aire d'un triangle rectangle, d'un carré ou d'un rectangle

À connaître



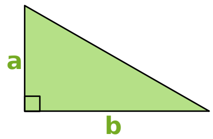
Pour calculer l'aire d'un carré, on multiplie la longueur d'un côté par elle-même :

A = c × c



Pour calculer l'aire d'un rectangle, on multiplie la longueur du rectangle par la largeur :

A = L × l



Pour calculer l'aire d'un triangle rectangle, on multiplie les longueurs des côtés adjacents à l'angle droit puis on divise le résultat par 2 :

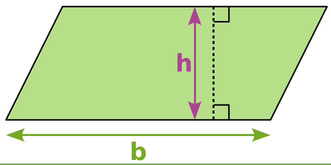
$$\mathbf{A = \frac{a \times b}{2}}$$

Méthode 2 : Calculer l'aire d'un parallélogramme

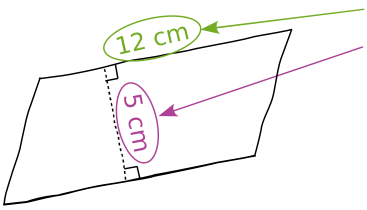
À connaître

Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on multiplie la longueur d'un côté par la <u>hauteur</u> relative à ce côté :

A = b × h



Exemple : Détermine l'aire du parallélogramme suivant :



On repère la longueur d'un côté.

On repère la hauteur relative à ce côté.

On multiplie la longueur du côté repéré par la hauteur relative à ce côté :

$$A = 12 \times 5 = 60$$

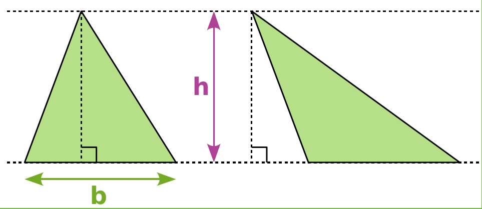
L'aire du parallélogramme vaut 60 cm².

Méthode 3 : Calculer l'aire d'un triangle

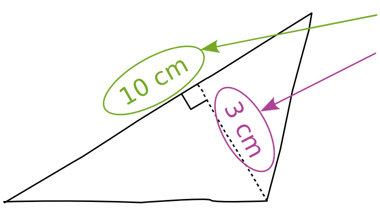
À connaître

Pour calculer l'aire d'un triangle, on multiplie la longueur d'un côté par la hauteur relative à ce côté puis on divise le résultat par 2 :

$$\mathbf{A = \frac{b \times h}{2}}$$



Exemple : Calcule l'aire du triangle suivant :



On repère la longueur d'un côté.

On repère la hauteur relative à ce côté.

On multiplie la longueur du côté repéré par la hauteur relative à ce côté puis on divise le résultat par 2 :

$$A = \frac{10 \times 3}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

L'aire du triangle vaut 15 cm².

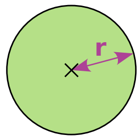
Méthode 4 : Calculer l'aire d'un disque

À connaître

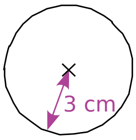
Pour calculer l'aire d'un disque, on multiplie le nombre π par le carré du rayon du disque :

$$\mathbf{A = \pi \times r^2}$$

On rappelle que : $r^2 = r \times r$.



Exemple : Calcule l'aire du disque suivant :



Le disque a un rayon de 3 cm. On multiplie donc le nombre π par le nombre 3 au carré :

$$A = \pi \times 3^2 = \pi \times 9 = 9\pi$$

L'aire exacte de ce disque est 9π cm².

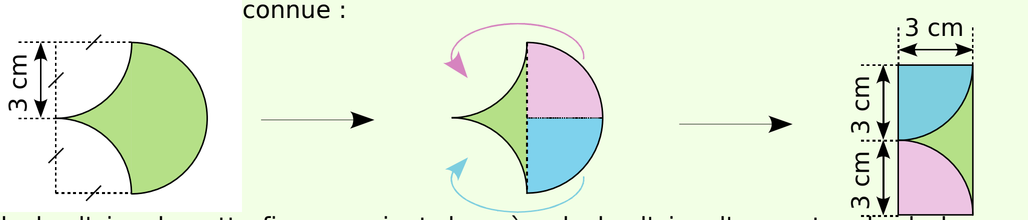
On peut obtenir une valeur approchée de l'aire du disque :

- en utilisant la touche π de la calculatrice, on obtient 28,274... . Une valeur approchée au centième de l'aire du disque est 28,27 cm².
- en prenant 3,14 comme valeur approchée au centième de π, on obtient 28,26 cm² comme valeur approchée de l'aire du disque.

Méthode 5 : Calculer une aire par découpage simple

Exemple 1 : Calcule l'aire de la figure suivante :

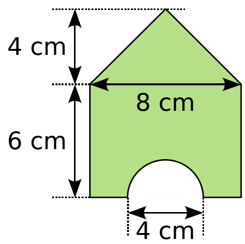
Pour calculer l'aire de cette figure, on découpe la figure en trois morceaux puis on les déplace pour reconstituer une figure connue :



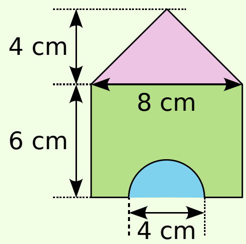
Calculer l'aire de cette figure revient donc à calculer l'aire d'un rectangle de largeur 3 cm et de longueur 6 cm : $A = 3 \times 6 = 18$.

L'aire de cette figure est 18 cm².

Exemple 2 : Calcule l'aire de la figure suivante :

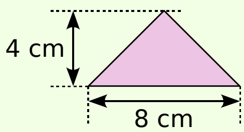


Pour calculer l'aire de cette figure, on repère des figures simples qui la constituent...



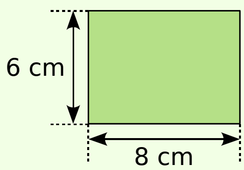
... puis on calcule l'aire de chacune des figues simples trouvées :

Un **triangle** dont un côté mesure 8 cm et la hauteur relative à ce côté mesure 4 cm :



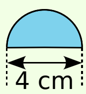
$A_T = \dfrac{4 \times 8}{2} = \dfrac{32}{2} = \mathbf{8}$

Un **rectangle** de largeur 6 cm et de longueur 8 cm :



$A_R = 6 \times 8 = \mathbf{48}$

Un **demi-disque** de rayon 2 cm :



$A_D = \dfrac{\pi \times 2^2}{2} = \mathbf{2\pi}$

L'aire de la figure est obtenue en additionnant l'aire du **triangle** et du **rectangle** puis en retranchant au résultat l'aire du **demi-disque** :

$$A = \mathbf{8} + \mathbf{48} - \mathbf{2\pi} = 56 - 2\pi$$

L'aire exacte de cette figure est $56 - 2\pi$ cm².

En prenant 3,14 comme valeur approchée du nombre π, on obtient $A \approx 49{,}72$ cm².

CHAPITRE G5 : ANGLES

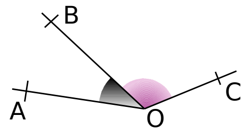
Méthode 1 : Caractériser deux angles ayant un sommet commun

À connaître

Deux angles adjacents sont deux angles qui ont un sommet commun, un côté commun et qui sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

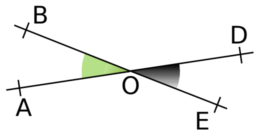
Deux angles opposés par le sommet sont deux angles qui ont un sommet commun et qui ont leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

Exemple 1 : Sur la figure ci-dessous, que peux-tu dire des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$?



Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ ont comme sommet commun le point O, comme côté commun la demi-droite [OB) et sont placés de part et d'autre de [OB) : ils sont donc adjacents.

Exemple 2 : Sur la figure ci-dessous, que peux-tu dire des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOE}$?



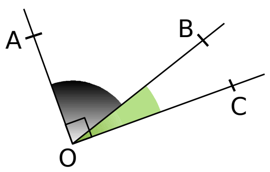
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOE}$ ont comme sommet commun le point O et des côtés dans le prolongement l'un de l'autre (A,O,D et B,O,E sont alignés) : ils sont donc opposés par le sommet.

Méthode 2 : Caractériser deux angles complémentaires

À connaître

Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme de leurs mesures est égale à 90°.

Exemple : Sur la figure ci-dessous, que peux-tu dire des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$?



Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ forment un angle droit : la somme de leurs mesures vaut 90°. Ce sont donc des angles complémentaires.

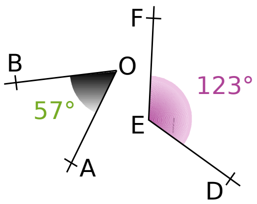
<u>Remarque</u> : Deux angles complémentaires et adjacents forment un angle droit. On peut donc en déduire que des droites sont perpendiculaires.

Méthode 3 : Caractériser deux angles supplémentaires

À connaître

Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme de leurs mesures est égale à 180°.

Exemple : Sur la figure ci-dessous, que peux-tu dire des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{FED}$?

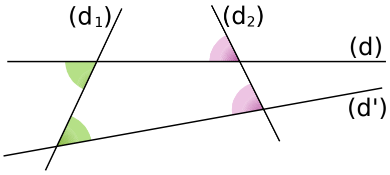


$\widehat{AOB} + \widehat{FED} = 57° + 123° = 180°$ donc les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{FED}$ sont supplémentaires.

<u>Remarque</u> : Deux angles supplémentaires et adjacents forment un angle plat. On peut donc en déduire que des points sont alignés.

Méthode 4 : Caractériser deux angles définis par deux droites et une sécante

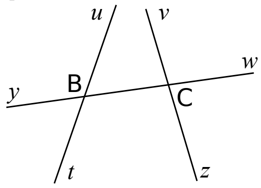
À connaître



Les angles verts sont **alternes-internes**. Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).

Les angles roses sont **correspondants**. Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_2).

Exemple : À l'aide de la figure, nomme des angles alternes-internes et des correspondants.



Les droites (ut), (vz) et la sécante (yw) forment :

- deux paires d'angles alternes-internes qui sont : $\widehat{uBw}$ et $\widehat{yCz}$, $\widehat{vCy}$ et $\widehat{tBw}$.
- quatre paires d'angles correspondants qui sont : $\widehat{yBu}$ et $\widehat{vCy}$, $\widehat{yBt}$ et $\widehat{yCz}$, $\widehat{uBw}$ et $\widehat{vCw}$, $\widehat{tBw}$ et $\widehat{zCw}$.

Méthode 5 : Calculer la mesure d'un angle

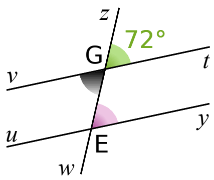
À connaître

Si deux angles sont opposés par le sommet **alors ils ont la même mesure**.

Si deux angles alternes-internes sont déterminés par des droites parallèles **alors ils ont la même mesure**.

Si deux angles correspondants sont déterminés par des droites parallèles **alors ils ont la même mesure**.

Exemple : Les droites (vt) et (uy) sont parallèles. Calcule la mesure des angles $\widehat{zEy}$ et $\widehat{vGw}$.



Les angles correspondants $\widehat{zGt}$ et $\widehat{zEy}$ sont déterminés par les droites (vt) et (uy) qui sont <u>parallèles</u>. Ils sont donc de la même mesure. L'angle $\widehat{zEy}$ mesure donc 72°.

Les angles $\widehat{zGt}$ et $\widehat{vGw}$ sont opposés par le sommet. Ils sont donc de la même mesure. L'angle $\widehat{vGw}$ mesure donc 72°.

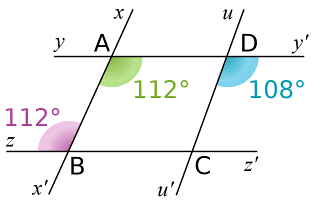
Méthode 6 : Justifier que des droites sont parallèles

À connaître

Si deux angles alternes-internes sont de même mesure
alors les deux droites coupées par la sécante sont parallèles.

Si deux angles correspondants sont de même mesure
alors les deux droites coupées par la sécante sont parallèles.

Exemple : Les droites (yy') et (zz') sont-elles parallèles ? Les droites (xx') et (uu') sont-elles parallèles ?



Les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{xBz}$ déterminés par les droites (yy'), (zz') et la sécante (xx') sont alternes-internes. Les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{xBz}$ ont la même mesure.
Donc les droites (yy') et (zz') sont parallèles.

Les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{u'Dy'}$ déterminés par les droites (xx'), (uu') et la sécante (yy') sont correspondants. Si les droites (xx') et (uu') étaient parallèles alors les angles $\widehat{x'Ay'}$ et $\widehat{u'Dy'}$ seraient de la même mesure, ce qui n'est pas le cas. Donc les droites (xx') et (uu') ne sont pas parallèles.

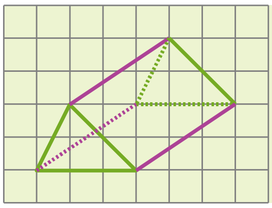
CHAPITRE G6 : PRISMES ET CYLINDRES

Méthode 1 : Représenter en perspective cavalière

À connaître

Lorsqu'on représente un solide en **perspective cavalière** :
- la face avant est représentée en vraie grandeur ;
- les arêtes parallèles sont représentées par des segments parallèles ;
- les arêtes cachées sont dessinées en pointillés.

Exemple 1 : Trace un prisme droit à base rectangulaire en perspective cavalière.

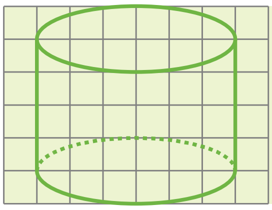


Les **bases** de ce prisme droit sont des triangles parallèles et superposables. On les représente en vraie grandeur.

Les **arêtes latérales** de ce prisme sont parallèles et de même longueur. On les représente par des segments parallèles de même longueur.

On trace en pointillés les arêtes cachées.

Exemple 2 : Trace un cylindre de révolution en perspective cavalière.



Les **bases** de ce cylindre de révolution sont des disques parallèles et superposables. On les représente par deux ovales (deux ellipses) car elles ne sont pas vues de face.

On trace en pointillés la partie cachée du cylindre de révolution.

Méthode 2 : Calculer l'aire latérale

À connaître

Pour **calculer l'aire latérale d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution**, on multiplie le périmètre d'une base par la hauteur :

$$\mathbf{A_{latérale} = P_{base} \times h}$$

Exemple 1 : Détermine l'aire latérale d'un prisme droit de hauteur 10 cm ayant pour base un parallélogramme ABCD tel que AB = 5 cm et BC = 3 cm.

On calcule le périmètre du parallélogramme ABCD qui est une base du prisme droit :

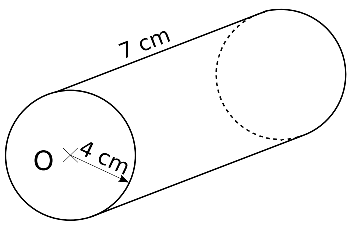
$$P_{base} = 2 \times (AB + BC) = 2 \times (5 + 3) = 2 \times 8 = 16 \text{ cm}.$$

On multiplie le périmètre d'une base par la hauteur :

$$A_{latérale} = P_{base} \times h = 16 \times 10 = 160.$$

L'aire latérale de ce prisme droit vaut 160 cm².

Exemple 2 : Détermine l'aire latérale du cylindre de révolution suivant :



On calcule le périmètre d'une base qui est un disque de rayon 4 cm :

$$P_{base} = 2 \times \pi \times 4 = 8\pi$$

On multiplie le périmètre d'une base par la hauteur :

$$A_{latérale} = P_{base} \times h = 8\pi \times 7 = 56\pi.$$

L'aire latérale de ce cylindre de révolution vaut 56π cm².

Une valeur approchée au centième de l'aire latérale de ce cylindre de révolution est 175,93 cm².

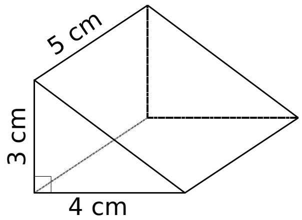
Méthode 3 : Calculer le volume

À connaître

Pour **calculer le volume d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution**, on multiplie l'aire d'une base par la hauteur :

$$\mathbf{V = A_{base} \times h}$$

Exemple 1 : Détermine le volume du prisme droit suivant :



On calcule l'aire d'une base qui est un triangle rectangle :

$$A_{base} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

On multiplie l'aire d'une base par la hauteur :

$$V = A_{base} \times h = 6 \times 5 = 30.$$

Le volume de ce prisme droit vaut 30 cm^3.

Exemple 2 : Détermine le volume d'un cylindre de révolution de hauteur 4 cm ayant pour base un disque de rayon 3 cm.

On calcule l'aire d'une base qui est un disque de rayon 3 cm :

$$A_{base} = \pi \times 3^2 = \pi \times 9 = 9\pi.$$

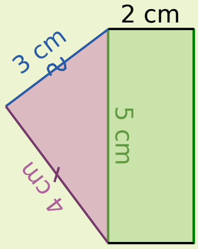
On multiplie l'aire d'une base par la hauteur :

$$V = A_{base} \times h = 9\pi \times 4 = 36\pi.$$

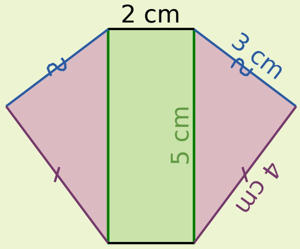
Le volume de ce cylindre de révoution vaut 36 π cm^3. Une valeur approchée au millième de ce volume est 113,097 cm^3.

Méthode 4 : Tracer un patron

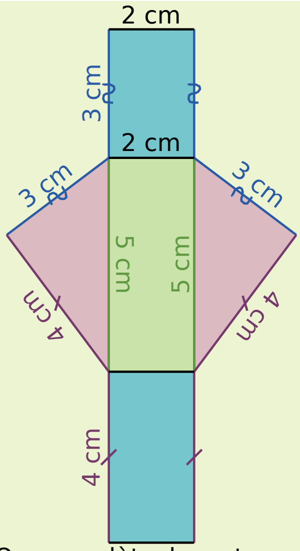
Exemple 1 : Dessine le patron d'un prisme droit dont la base est un triangle de côtés 5 cm, 4 cm et 3 cm, et dont la hauteur est 2 cm.



On construit une des bases qui est un triangle puis on trace une face latérale qui est un rectangle de longueur un côté de la base et de largeur la hauteur du prisme droit.

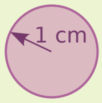


On trace la seconde base qui est un triangle superposable au premier triangle.

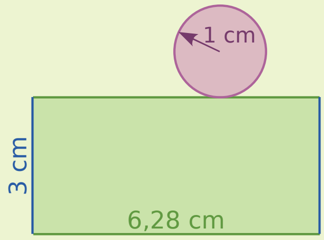


On complète le patron en traçant les deux dernières faces latérales du prisme droit qui sont des rectangles.

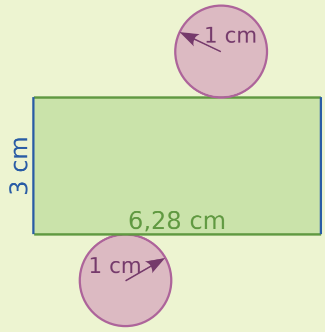
Exemple 2 : Dessine le patron d'un cylindre de révolution de hauteur 2 cm ayant pour base un disque de rayon 1 cm.



On construit une des bases du cylindre qui est un disque.



On trace la surface latérale du cylindre qui est un rectangle de largeur la hauteur du cylindre et de longueur le périmètre du cercle qui est environ 6,28 cm.



On complète le tracé en traçant la seconde base qui est un disque superposable au premier.

CHAPITRE N1 : PROPRIETES, DISTRIBUTIVITE

Méthode 1 : Calculer une expression

À connaître

Dans une expression, on effectue d'abord les calculs entre les parenthèses les plus intérieures puis les multiplications et les divisions de gauche à droite et, enfin, les additions et les soustractions de gauche à droite.

Exemple : Calcule A = 7 + 2 × (5 + 7) – 5.

A = 7 + 2 × (5 + 7) – 5	→	On effectue les calculs entre parenthèses.
A = 7 + 2 × 12 – 5	→	On effectue les multiplications.
A = 7 + 24 – 5	→	On effectue les additions et les soustractions de gauche à droite.
A = 31 – 5	→	On effectue les additions et les soustractions de gauche à droite.
A = 26		

Méthode 2 : Calculer une expression fractionnaire

À connaître

Dans une expression fractionnaire, on effectue les calculs au numérateur et au dénominateur puis on simplifie la fraction ou on calcule le quotient.

Exemple : Calcule F = $\dfrac{13+5}{12-4}$.

F = $\dfrac{13+5}{12-4}$		
F = $\dfrac{18}{8}$	→	On effectue les calculs au numérateur et au dénominateur.
F = $\dfrac{9}{4}$	→	On simplifie la fraction.
F = 2,25	→	On calcule le quotient quand il tombe juste.

Méthode 3 : Développer une expression

À connaître

Soient k, a et b trois nombres positifs. Pour **développer une expression**, on distribue un facteur à chacun des termes entre parenthèses :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exemple : Développe puis calcule M = 4 × (7 + 9).

M = **4** × (7 + 9)	→	On distribue le facteur **4** aux termes 7 et 9.
M = **4** × 7 + **4** × 9	→	On calcule en respectant les priorités opératoires.
M = 28 + 36		
M = 64		

Méthode 4 : Factoriser une expression

À connaître

Soient k, a et b trois nombres positifs. Pour **factoriser une expression**, on repère le facteur commun à tous les termes et on le multiplie par la somme ou la différence des autres facteurs :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$
$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Exemple : Factorise puis calcule N = 25 × 11 – 25 × 7.

N = **25** × 11 – **25** × 7	⟶	On repère le facteur commun : **25**.
N = **25** × (11 – 7)	⟶	On met en facteur le nombre **25**.
N = **25** × 4	⟶	On calcule en respectant les priorités opératoires.
N = 100		

CHAPITRE N2 : NOMBRES EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

Méthode 1 : Quotients égaux

À connaître

Le quotient de deux nombres reste inchangé si on multiplie (ou si on divise) ces deux nombres par un même nombre non nul.

Exemple : Simplifie la fraction $\frac{75}{210}$.

$$\frac{75}{210} = \frac{5 \times 5 \times 3}{7 \times 3 \times 5 \times 2} = \frac{5}{2 \times 7} = \frac{5}{14}$$

Écris 7,5 sous la forme d'une fraction simplifiée.

$$7{,}5 = \frac{75}{10} = \frac{15 \times 5}{2 \times 5} = \frac{15}{2}$$

Remarque : Cette règle est souvent utilisée pour mettre deux quotients au même dénominateur.

Méthode 2 : Comparer

À connaître

Pour **comparer des nombres en écriture fractionnaire**, on les écrit avec le même dénominateur puis on les range dans le même ordre que leurs numérateurs.

Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est supérieur à son dénominateur alors il est supérieur à 1. Si son numérateur est inférieur à son dénominateur alors il est inférieur à 1.

Exemple : Compare les nombres $\frac{1{,}2}{4}$ et $\frac{5{,}7}{20}$.

$\frac{1{,}2}{4} = \frac{1{,}2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$ ⟶ On écrit le nombre $\frac{1{,}2}{4}$ avec le dénominateur 20.

$6 > 5{,}7$ ⟶ On compare les numérateurs.

d'où $\frac{6}{20} > \frac{5{,}7}{20}$ ⟶ On range les expressions fractionnaires dans le même ordre que leurs numérateurs.

Donc $\frac{1{,}2}{4} > \frac{5{,}7}{20}$ ⟶ On conclut.

Méthode 3 : Additionner ou soustraire

À connaître

Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire :
- on écrit les nombres avec le même dénominateur ;
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Exemple : Calcule l'expression $A = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$.

$A = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$

$A = \frac{7 \times 4}{3 \times 4} + \frac{6}{12}$ ⟶ On écrit les fractions avec le même dénominateur **12**.

$A = \frac{28}{12} + \frac{6}{12}$

$A = \frac{34}{12}$ ⟶ On additionne les numérateurs.

$A = \frac{17}{6}$ ⟶ On simplifie la fraction lorsque c'est possible.

Méthode 4 : Multiplier

À connaître

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple 1 : Calcule l'expression D = $\frac{8}{7} \times \frac{5}{3}$.

$D = \frac{8}{7} \times \frac{5}{3}$		
$D = \frac{8 \times 5}{7 \times 3}$	⟶	On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
$D = \frac{40}{21}$	⟶	On effectue les calculs.

Exemple 2 : Calcule l'expression E = $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$. Donne le résultat sous forme simplifiée.

$E = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$		
$E = \frac{3 \times 2}{4 \times 5}$	⟶	On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
$E = \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5}$	⟶	On simplifie la fraction.
$E = \frac{3}{10}$	⟶	On donne le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.

Exemple 3 : En commençant par simplifier, calcule l'expression F = $\frac{4}{15} \times \frac{25}{16}$.

$F = \frac{4}{15} \times \frac{25}{16}$		
$F = \frac{4 \times 25}{15 \times 16}$	⟶	On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
$F = \frac{4 \times 5 \times 5}{3 \times 5 \times 4 \times 4}$	⟶	On remarque que 16 est un multiple de 4 et que 25 et 15 sont des multiples de 5. On décompose 16, 25 et 15 en produits de facteurs.
$F = \frac{5}{3 \times 4}$	⟶	On simplifie par les facteurs 4 et 5.
$F = \frac{5}{12}$	⟶	On effectue les calculs restants.

Méthode 5 : Prendre une fraction d'une quantité

À connaître

Prendre une fraction d'un nombre (fractionnaire ou non) revient à multiplier cette fraction par ce nombre.

Exemple 1 : Calculer les $\frac{2}{3}$ de 270.

$\frac{2}{3} \times 270$	⟶	On multiplie la fraction $\frac{2}{3}$ par la quantité 270.
$= \frac{2 \times 90 \times 3}{3}$	⟶	On effectue les calculs.
$= 2 \times 90 = 180$	⟶	On effectue le quotient ou on simplifie la fraction.

Exemple 2 : Calculer les deux cinquièmes de trois septièmes.

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}$		
$= \frac{2 \times 3}{5 \times 7}$	⟶	On multiplie la fraction $\frac{2}{3}$ par la fraction $\frac{3}{7}$.
$= \frac{6}{35}$	⟶	On effectue les calculs en simplifiant si nécessaire.

CHAPITRE N3 : NOMBRES RELATIFS

Méthode 1 : Savoir utiliser le vocabulaire

À connaître

Un **nombre relatif positif** s'écrit avec le signe + ou sans signe.
Un **nombre relatif négatif** s'écrit avec le signe –.
0 est le seul nombre à la fois positif et négatif.
Deux nombres relatifs qui ne diffèrent que par leur signe sont **opposés**.

Exemple : Quel est le signe du nombre – 3,2 ? Quel est son opposé ?

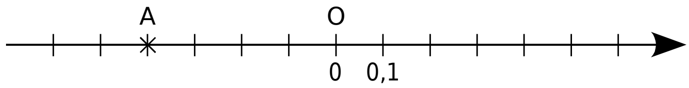
Le signe de – 3,2 est –, il est négatif. Son opposé est + 3,2 que l'on écrit aussi 3,2.

Méthode 2 : Repérer un point sur une droite graduée

À connaître

Tout point d'une droite graduée est repéré par un nombre relatif appelé son **abscisse**.

Exemple 1 : Sur la droite graduée ci-dessous, lis l'abscisse du point A.

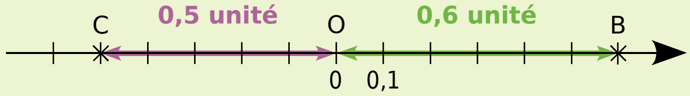


Le point A est à gauche de l'origine : son abscisse est donc négative.
La distance du point A au point O est 0,4.
donc l'abscisse du point A est – 0,4.

Exemple 2 : Trace une droite graduée et place les points B(+ 0,6) et C(– 0,5).

L'abscisse du point B est + 0,6 donc
Son abscisse est positive : le point B est donc à droite de l'origine.
Sa distance à l'origine est de 0,6 unité.

L'abscisse du point C est – 0,5 donc
Son abscisse est négative : le point C est donc à gauche de l'origine.
Sa distance à l'origine est de 0,5 unité.



Méthode 3 : Trouver la distance à zéro d'un nombre relatif

À connaître

La **distance à zéro** d'un nombre relatif est le nombre sans son signe.
Sur une droite graduée, cela correspond à la distance entre l'origine et le point qui a pour abscisse ce nombre.

Exemple : Donne la distance à zéro du nombre – 2,7.

La distance à zéro du nombre – 2,7 est 2,7.

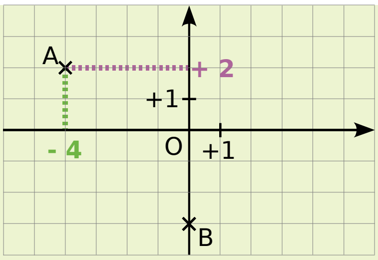
Méthode 4 : Repérer un point dans un plan

À connaître

Dans un plan muni d'un repère, tout point est repéré par un couple de nombres relatifs appelé ses **coordonnées** : la première est l'**abscisse** et la seconde est l'**ordonnée**.

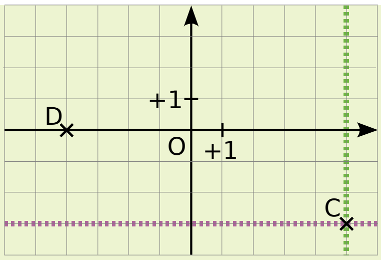
Exemple : Lis les coordonnées du point A et du point B.

Place les points C(5 ; – 3) et D(– 4 ; 0).



Pour lire les coordonnées du point A, on repère l'abscisse de A sur l'axe horizontal puis on repère l'ordonnée de A sur l'axe vertical. On conclut en donnant l'abscisse puis l'ordonnée : A (– 4 ; + 2).

Le point B appartient à l'axe des ordonnées donc son abscisse est 0. Ses coordonnées sont (0 ; – 3).



Pour placer le point C, on repère tous les points d'abscisse + 5 (ligne verte) puis on repère tous les points d'ordonnée – 3 (ligne violette). On place le point C à l'intersection des deux lignes.

L'ordonnée du point D est 0 donc le point D appartient à l'axe des abscisses.

Méthode 5 : Comparer deux nombres relatifs

À connaître

Deux nombres relatifs positifs sont rangés dans l'ordre de leur distance à zéro.
Un nombre relatif négatif est inférieur à **un nombre relatif positif**.
Deux nombres relatifs négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.

Exemple : Compare les nombres : – 9,9 et – 7,7.

– 9,9 et – 7,7	→	On veut comparer deux nombres relatifs négatifs.
9,9 > 7,7	→	On détermine les distances à zéro de – 9,9 et de – 7,7 puis on les compare.
– 9,9 < – 7,7	→	On range les nombres – 9,9 et – 7,7 dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.

Méthode 6 : Additionner deux nombres relatifs

À connaître

Pour **additionner deux nombres relatifs de même signe**, on additionne leurs distances à zéro et on garde le signe commun.
Pour **additionner deux nombres relatifs de signes contraires**, on soustrait leurs distances à zéro et on prend le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro.

Exemple 1 : Effectue l'addition suivante : A = (– 2) + (– 3).

A = (– 2) + (– 3)	→	On veut additionner deux nombres négatifs.
A = – (2 + 3)	→	On additionne les distances à zéro et on garde le signe commun : **–**.
A = – 5	→	On calcule.

Exemple 2 : Effectue l'addition suivante : B = (– 5) + (+ 7).

B = (– 5) + (+ 7)	→	On veut additionner deux nombres de signes différents.
B = + (7 – 5)	→	On soustrait leurs distances à zéro et on écrit le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.
B = + 2	→	On calcule.

Méthode 7 : Soustraire deux nombres relatifs

À connaître

Soustraire un nombre relatif revient à additionner son opposé.

Exemple : Effectue la soustraction suivante : F = (– 2) – (– 3).

F = (– 2) – (– 3)	→	On veut soustraire le nombre – 3.
F = (– 2) + (+ 3)	→	On additionne l'opposé de – 3.
F = + (3 – 2)	→	On additionne deux nombres de signes différents donc on soustrait leurs distances à zéro et on écrit le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.
F = + 1	→	On calcule.

Méthode 8 : Calculer la distance entre deux points

À connaître

Pour **calculer la distance entre deux points** sur une droite graduée, on effectue la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite abscisse.

Exemple : Calcule la distance entre le point G d'abscisse + 4 et le point H d'abscisse – 7.

+ 4 > – 7	→	On compare les abscisses pour trouver la plus grande.
GH = (+ 4) – (– 7)	→	Pour calculer la distance entre G et H, on effectue la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite.
GH = (+ 4) + (+ 7)	→	On transforme la soustraction en addition.
GH = + (4 + 7)	→	On additionne deux nombres de même signe donc on additionne leurs distances à zéro et on garde le signe commun.
GH = + 11	→	On calcule.

Méthode 9 : Effectuer un enchaînement de calculs

Exemple 1 : Calcule l'expression suivante en effectuant les calculs de gauche à droite : H = (+ 4) + (– 5) – (– 8).

H = (+ 4) + (– 5) – (– 8)

H = (+ 4) + (– 5) + (+ 8) → On transforme les soustractions en additions des opposés.

H = (– 1) + (+ 8) → On effectue les calculs de gauche à droite.

H = + 7 → On termine le calcul.

Exemple 2 : Calcule l'expression suivante en regroupant les nombres positifs puis en regroupant les nombres négatifs : K = (– 8) + (+ 31) + (– 50) – (– 7).

K = (– 8) + (+ 31) + (– 50) – (– 7)

K = (– 8) + (+ 31) + (– 50) + (+ 7) → On transforme les soustractions en additions des opposés.

K = (+ 31) + (+ 7) + (– 8) + (– 50) → On regroupe les nombres positifs puis on regroupe les nombres négatifs.

K = (+ 38) + (– 58)

K = – 20 → On calcule.

Méthode 10 : Simplifier l'écriture d'un calcul

À connaître

> Dans une suite d'additions de nombres relatifs, on peut supprimer les signes d'addition et les parenthèses autour d'un nombre.
>
> Un nombre positif écrit en début de calcul peut s'écrire sans son signe.

Remarque : Dans le cas d'une expression avec des soustractions, on peut se ramener à une suite d'additions.

Exemple : Simplifie l'expression M = (+ 4) + (– 11) – (+ 3).

M = (+ 4) + (– 11) – (+ 3)

M = (+ 4) + (– 11) + (– 3) → On transforme les soustractions en additions des opposés.

M = + 4 – 11 – 3 → On supprime les signes d'addition et les parenthèses autour des nombres.

M = 4 – 11 – 3 → On supprime le signe + en début de calcul.

CHAPITRE N4 : CALCUL LITTERAL

Méthode 1 : Écrire une expression en respectant les conventions

À connaître

Pour alléger l'écriture d'une expression littérale, on peut supprimer le signe × devant une lettre ou une parenthèse.

Remarque : On ne peut pas supprimer le signe × entre deux nombres.

Exemple : Supprime les signes ×, lorsque c'est possible, dans l'expression suivante : A = $5 \times x + 7 \times (3 \times x + 2 \times 4)$.

A = $5 \times x + 7 \times (3 \times x + 2 \times 4)$ → On repère tous les signes × de l'expression.

A = $5x + 7(3x + 2 \times 4)$ → On supprime les signes × devant une lettre ou une parenthèse.

À connaître

Pour tout nombre a, on peut écrire : $a \times a = a^2$ (qui se lit « a au carré »)

$a \times a \times a = a^3$ (qui se lit « a au cube »).

Méthode 2 : Remplacer des lettres par des nombres

À connaître

Pour calculer une expression littérale pour une certaine valeur des lettres, il suffit de remplacer les lettres par ces valeurs.

Exemple : Calcule l'expression A = $5x(x + 2)$ pour $x = 3$.

A = $5 \times x \times (x + 2)$ → On replace les signes × dans l'expression A.

A = $5 \times \mathbf{3} \times (\mathbf{3} + 2)$ → On remplace la lettre x par sa valeur **3**.

A = 15×5 → On effectue les calculs.

A = 75

Méthode 3 : Développer une expression littérale

À connaître

Soient k, a et b trois nombres positifs. Pour **développer une expression**, on distribue le facteur à tous les termes entre parenthèses :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exemple : Développe l'expression suivante : A = $3(x + 7)$.

A = $\mathbf{3} \times (x + 7)$ → On replace le signe × dans l'expression.

A = $\mathbf{3} \times x + \mathbf{3} \times 7$ → On distribue le facteur **3** aux termes x et 7.

A = $3x + 21$ → On calcule et on simplifie l'expression.

Méthode 4 : Factoriser une expression littérale

À connaître

Soient k, a et b trois nombres positifs. Pour **factoriser une expression**, on repère le facteur commun à chaque terme et on le multiplie par la somme ou la différence des autres facteurs :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$
$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Exemple : Factorise les expressions suivantes : A = $5x + 35$ puis B = $x^2 + 3x$.

$A = 5 \times x + 35$	$\longrightarrow$	On replace le signe × dans l'expression.
$A = \mathbf{5} \times x + \mathbf{5} \times 7$	$\longrightarrow$	On fait apparaître le facteur commun : **5**.
$A = \mathbf{5} \times (x + 7)$	$\longrightarrow$	On met en facteur le nombre **5**.
$A = \mathbf{5}(x + 7)$	$\longrightarrow$	On simplifie l'expression.
$B = x \times \boldsymbol{x} + 3 \times \boldsymbol{x}$	$\longrightarrow$	On replace le signe × dans l'expression et on repère le facteur commun : $\boldsymbol{x}$.
$B = \boldsymbol{x}(x + 3)$	$\longrightarrow$	On met en facteur la lettre $\boldsymbol{x}$ puis on simplifie.

Méthode 5 : Réduction d'une expression avec une lettre

Exemple 1 : Réduis l'écriture de l'expression : A = $5a + 3a^2 - 2 - 3a + 6a^2 - 7$.

$A = 5a + 3a^2 - 2 - 3a + 6a^2 - 7$		
$A = 3a^2 + 6a^2 + 5a - 3a - 2 - 7$	$\longrightarrow$	On regroupe les termes en a^2, les termes en a et les termes constants.
$A = (3 + 6)a^2 + (5 - 3)a - 2 - 7$	$\longrightarrow$	On factorise.
$A = 9a^2 + 2a - 9$	$\longrightarrow$	On effectue les calculs.

Exemple 2 : Réduis l'écriture de l'expression : B = $3z - 5 + 2t - z + 1$.

$B = 3z - 5 + 2t - z + 1$		
$B = 3z - z + 2t - 5 + 1$	$\longrightarrow$	On regroupe les termes en z, les termes en t et les termes constants.
$B = (3 - 1)z + 2t - 5 + 1$	$\longrightarrow$	On factorise.
$B = 2z + 2t - 4$	$\longrightarrow$	On effectue les calculs.

Méthode 6 : Tester une égalité

Exemple 1 : Teste l'égalité $2a + 7 = 5a + 4$ pour $a = 0$.

On remplace a par 0 dans le membre de gauche de l'égalité puis on calcule : $2 \times 0 + 7 = 0 + 7 = \mathbf{7}$	On remplace a par 0 dans le membre de droite de l'égalité puis on calcule : $5 \times 0 + 4 = 0 + 4 = \mathbf{4}$

$\mathbf{7} \neq \mathbf{4}$ donc l'égalité n'est pas vérifiée pour $a = 0$.

Exemple 2 : Teste l'égalité $3(x + 2) = 18$ pour $x = 4$.

On remplace x par 4 dans le membre de gauche de l'égalité puis on calcule : $3 \times (4 + 2) = 3 \times 6 = \mathbf{18}$	Le membre de droite de l'égalité vaut **18**.

Les deux membres de l'égalité sont égaux à 18 pour $x = 4$
donc 4 est <u>solution</u> de l'équation $3(x + 2) = 18$.

CHAPITRE N5 : PROPORTIONNALITE

Méthode 1 : Identifier une situation de proportionnalité

À connaître

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque l'une s'obtient en multipliant (ou en divisant) l'autre par un même nombre non nul.
Ce coefficient multiplicateur est un **coefficient de proportionnalité**.

Exemple : Le carburant pour un motoculteur est un mélange de super et d'huile où les doses d'huile et d'essence sont proportionnelles : il faut 2 doses d'huile pour 3 doses de super. Détermine le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir la dose de super en fonction de la dose d'huile.

Données
du problème

Doses d'huile	2	...
Doses de super	3	...

$\times\, k$

Le nombre k vérifie : $2 \times k = 3$

Donc : $k = \dfrac{3}{2}$

k est le quotient de 3 par 2

Ainsi : $k = 1{,}5$

Le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir la dose de super en fonction de la dose d'huile est 1,5.

Remarque : Soit h le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir la dose d'huile en fonction de la dose de super :

Données
du problème

Doses d'huile	2	...
Doses de super	3	...

$\times\, h$

Le nombre h vérifie : $3 \times h = 2$

Donc : $h = \dfrac{2}{3}$

h est le quotient de 2 par 3

Donc Dose d'huile $= \dfrac{2}{3} \times$ Dose de super

À connaître

Pour vérifier si **deux grandeurs** sont **proportionnelles**, on peut s'assurer qu'elles évoluent toutes les deux dans les mêmes proportions.

Exemple : Les tarifs des remontées mécaniques d'une station de ski sont les suivants : 25 € la journée, 45 € les deux jours et 120 € les 6 jours. Le prix à payer est-il proportionnel à la durée ?

Si le prix à payer était proportionnel à la durée, en payant 25 € la journée, on devrait payer le double pour deux jours, soit 50 € et 6 fois plus pour six jours, soit 150 €.

Comme ce n'est pas le cas, le prix à payer n'est pas proportionnel à la durée.

Méthode 2 : Remplir un tableau de proportionnalité

Soit on utilise un coefficient de proportionnalité :

Exemple 1 : On reprend l'exercice du mélange huile/super pour le motoculteur. Quelle quantité de super faut-il rajouter si l'on verse d'abord 4,5 L d'huile ?

On a vu dans le paragraphe précédent : Dose de super = 1,5 × Dose d'huile

Dose d'huile (en L)	2	4,5
Dose de super (en L)	3	x

$\times$**1,5**

On multiplie par le coefficient de proportionnalité adéquat et on obtient :

$x = 4,5 \times \mathbf{1,5} = 6,75$

Soit on utilise des relations entre les différentes valeurs des grandeurs :

On utilise cette méthode lorsque le coefficient de proportionnalité n'est pas un nombre décimal ou pour simplifier les calculs.

Exemple 2 : La prime annuelle d'un vendeur est proportionnelle au montant des ventes qu'il a réalisées pendant l'année. Le directeur du magasin utilise le tableau suivant pour verser les primes à ses vendeurs.

Ventes (en €)	2 000	8 000		18 000	20 000	38 000
Primes (en €)		500	1 000	1 125	1 250	

Aide-le à compléter les cases colorées.

Les ventes sont divisées par 4 ...

... donc les ventes doublent.

Les montants s'additionnent ...

+

Ventes (en €)	2 000	8 000	**16 000**	18 000	20 000	38 000
Primes (en €)	**125**	500	1 000	1 125	1 250	**2 375**

... donc les primes sont divisées par 4.

La prime double ...

+

... donc les primes s'additionnent.

Méthode 3 : Reconnaître un tableau de proportionnalité

À connaître

Un tableau de nombres relève d'une situation de proportionnalité si un même coefficient (non nul) multiplicateur s'applique dans **tout** le tableau. On parle alors de **coefficient de proportionnalité**.

Exemple : Ces tableaux de nombres sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

5	8	14	19	24
12	19,2	33,6	45,6	57,6

12	18	32	27	54
8	12	20	18	36

$\frac{12}{5} = \mathbf{2,4}$ donc 2,4 est un coefficient de proportionnalité potentiel et on vérifie qu'il convient pour les autres valeurs :

$8 \times \mathbf{2,4} = 19,2$ $\quad 14 \times \mathbf{2,4} = 33,6$

$19 \times \mathbf{2,4} = 45,6$ $\quad 24 \times \mathbf{2,4} = 57,6$

On obtient bien les valeurs du tableau, c'est un tableau de proportionnalité.

On calcule les quotients :

$\frac{12}{8} = 1,5 \qquad \frac{18}{12} = 1,5 \qquad \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{20}} = 1,6$

On a trouvé un quotient différent des deux précédents, il est inutile de calculer les suivants. Ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité.

Méthode 4 : Résoudre des problèmes d'échelles

À connaître

Les dimensions sur un plan (ou sur une carte) sont proportionnelles aux dimensions réelles. **L'échelle** du plan (ou de la carte) est le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les dimensions sur le plan en fonction des dimensions réelles.

Il s'exprime souvent sous forme fractionnaire : $\dfrac{\textit{dimensions sur le plan}}{\textit{dimensions réelles}}$.

(Les dimensions sont exprimées dans la même unité.)

Exemple : Sur une maquette à l'échelle 1/48, quelle est la taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette ? Et la taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m de long dans la réalité ?

L'échelle 1/48 s'interprète par : 1 cm sur le plan représente 48 cm dans la réalité. Cela se traduit aussi par le tableau de proportionnalité suivant :

Dimensions sur la maquette (en cm)	1	12	15
Dimensions réelles (en cm)	48	576	720

$\times 48$

On exprime toutes les données du problème en centimètres :

7,2 m = 720 cm

La taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette est 576 cm (ou 5,76 m).
La taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m de long dans la réalité est 15 cm.

Méthode 5 : Travailler avec un mouvement uniforme

À connaître

On peut exprimer une durée à l'aide de nombres décimaux ou de fractions de durées : 1 min = $\frac{1}{60}$ h et 1 s = $\frac{1}{60}$ min.

Exemple : Exprime en heure décimale les durées suivantes : 15 min et 90 min.

15 min = $\frac{15}{60}$ h soit 0,25 h.

90 min = $\frac{90}{60}$ h soit 1,5 h.

À connaître

Lorsqu'on se déplace à allure constante, on parle de **mouvement uniforme**.
Dans ce cas, la distance parcourue est proportionnelle à la durée.

Remarque : La vitesse est un coefficient de proportionnalité.

Exemple : Un avion vole à allure constante et a parcouru 780 km en une heure. Quelle distance parcourra-t-il en 2 h ? en 1 h 30 min ?

Puisque l'avion vole à allure constante, le mouvement est uniforme. La distance parcourue est donc proportionnelle à la durée du vol. En 2 h, il couvrira ainsi une distance **deux fois** plus grande : 780 km **×** **2** = 1 560 km.

1 h 30 min = **1,5** h donc l'avion parcourra : 780 km **×** **1,5** = 1 170 km.

Méthode 6 : Utiliser des pourcentages

Exemple : Dans un collège, trois élèves sur cinq possèdent un vélo. Quel pourcentage des élèves du collège possèdent un vélo ?

Cette situation revient à déterminer le nombre t dans le tableau de proportionnalité suivant :

Élèves qui ont un vélo	3	t
Effectif total du collège	5	100

$\times \frac{3}{5}$

Donc $t = 100 \times \frac{3}{5} = 60$.

Il y a donc 60 % des élèves qui ont un vélo dans ce collège.

Remarque : On peut aussi déterminer t en utilisant les propriétés sur les colonnes, en remarquant que $100 = 5 \times 20$ donc $t = 3 \times 20 = 60$.

CHAPITRE N6 : STATISTIQUES

Méthode 1 : Maîtriser le vocabulaire

À connaître

Lorsque l'on réalise une enquête, on est amené à étudier des **caractères** propres à chaque **individu**. L'ensemble des individus est appelé la **population**.
Le caractère peut être **qualitatif** (la couleur des cheveux, les sports pratiqués ou le type de film préféré) ou **quantitatif** (la taille, l'âge, le temps passé devant la télévision, ...).
L'ensemble des données collectées avant traitement est appelé **série brute**. Les données sont ensuite regroupées et présentées dans un **tableau de données**.
Le nombre total d'individus de la population est appelé **effectif total**. Le nombre d'individus qui possèdent un même caractère est appelé **effectif du caractère**.

Exemple : On a demandé aux 28 élèves d'une classe leur régime (demi-pensionnaire ou externe). La série brute des résultats de cette enquête est la suivante :

E DP E E E DP E DP DP DP E DP DP E E DP DP E E E DP E E DP DP E E DP

Dans cet exemple,

- la population étudiée est l'ensemble des élèves de la classe ;
- les individus sont chacun des élèves de cette classe ;
- l'effectif total est 28 (car il y a 28 élèves) ;
- le caractère étudié est qualitatif : il s'agit du régime (DP ou E) ;
- l'effectif du caractère « demi-pensionnaire » est 13 et celui du caractère « externe » est 15.

On peut présenter ces résultats dans un tableau de données :

Régime	**Demi-pensionnaire**	**Externe**	**Total**
Effectif	13	15	28

Méthode 2 : Regrouper des données par classes

À connaître

Lorsque l'on traite une série brute de données quantitatives, pour **limiter la taille du tableau de données**, on est parfois amené à **regrouper les données par classes**.
Une **classe** est un intervalle de valeurs que peut prendre le caractère quantitatif étudié.
Regrouper par classes, **c'est déterminer le nombre de caractères qui appartiennent à chaque classe**.
L'amplitude d'une classe est la longueur de l'intervalle de valeurs. Les classes peuvent être d'amplitudes différentes.

Exemple : On a demandé à 28 élèves leur taille en centimètres. La série brute constituée par les résultats de cette enquête est la suivante :

155	151	153	148	155	153	148	152	151	153	156	147	145	156
154	156	149	153	155	152	149	148	152	156	153	148	148	150

Regroupe ces données par classes d'amplitude 4 puis indique le nombre de personnes qui ont une taille comprise entre 150 cm et 154 cm.

On commence par regarder les valeurs extrêmes de cette série puis on détermine le nombre de classes que l'on va faire.

Taille comprise (en cm)	**Entre 145 et 149**	**Entre 150 et 154**	**Entre 155 et 159**
Effectif	9	12	7

Il y a donc 12 personnes qui ont une taille comprise entre 150 et 154 cm.

Méthode 3 : Calculer une fréquence et une fréquence en pourcentage

À connaître

La fréquence d'un caractère est le quotient : $\frac{\textit{effectif du caractère}}{\textit{effectif total}}$.

Ce quotient peut être écrit sous diverses formes : décimale (exacte ou approchée) ou fractionnaire.

Lorsqu'on exprime ce quotient sous la forme d'une fraction de dénominateur 100, on parle de **fréquence en pourcentage**.

Calculer la fréquence d'un caractère pour deux populations d'effectifs différents permet de comparer la répartition de ce caractère au sein des deux populations.

Exemple : Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 filles. Calcule la fréquence puis la fréquence en pourcentage des filles parmi les élèves de la classe.

La fréquence des filles dans la classe est ${12 \over 30}$.

Cette fréquence peut aussi s'exprimer sous la forme :

- d'une fraction simplifiée : ${2 \over 5}$;
- d'un nombre décimal : 0,4 ;
- d'une fraction de dénominateur 100 : $\frac{40}{100}$. On obtient alors la fréquence en pourcentage qui se note aussi 40 %.

:

Méthode 4 Construire un diagramme circulaire ou semi-circulaire

À connaître

L'angle de chaque secteur angulaire d'un diagramme circulaire (ou semi-circulaire) est **proportionnel** à l'effectif du caractère.

L'effectif total correspond à **un angle de 360°** (180° pour les semi-circulaires).

On obtient l'angle en multipliant la fréquence du caractère par 360 (ou 180).

Exemple : Le recensement de l'INSEE de 1999, montre que :

- 14 951 165 personnes ont moins de 20 ans ;
- 32 555 443 ont entre 20 et 59 ans ;
- 12 680 597 ont plus de 60 ans.

Construis un diagramme circulaire permettant de représenter la répartition de la population en fonction de l'âge.

On veut réaliser un diagramme circulaire représentant ces données. Pour calculer les angles, on complète le tableau suivant (valeur arrondie au centième pour les fréquences et au degré pour les angles) :

Tranche d'âge	Moins de 20 ans	Entre 20 et 59 ans	Plus de 60 ans	Total
Effectif	14 951 165	32 555 443	12 680 597	60 187 205
Fréquence	0,25	0,54	0,21	1
Angle	90°	194°	76°	360°

×360

Par exemple, pour les moins de 20 ans, la fréquence vaut :

14 951 165 : 60 187 205 ≈ 0,25

donc l'angle vaudra : 0,25 × 360 = 90, c'est à dire 90°.

On construit ensuite le diagramme :

Répartition de la population en 1999